MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Øving 11

Oppgaver fra boken:

$$10.6 : \mathbf{1}, 8, \mathbf{9}, \mathbf{12}, \mathbf{19}, 26, \mathbf{29}, \mathbf{33}, 34$$

Det er oppgavene i **boldface** som skal leveres inn.

Lokale ekstremalpunkter: La $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ være et domene i planet og la $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ være en funksjon med kontinuerlige andrederiverte. Anta at $(a, b) \in \mathcal{D}$ er et kritisk punkt, dvs. $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. Da er

- (a, b) et **lokalt minimum** hvis $\det Hf(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$,
- (a, b) et **lokalt maksimum** hvis $\det Hf(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$,
- (a, b) et **sadelpunkt** hvis $\det Hf(a, b) < 0$.

$\boxed{\text{10.6:1}}$ Finn og klassifisér alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x.$$

Kommentar:
Hvis determinanten er positiv, spiller det ingen rolle om vi sjekker fortegnet til $\operatorname{tr} Hf$ eller fortegnet til $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Du kan forsøke å bevise følgende påstand selv: Anta $\det Hf > 0$. Da er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \qquad \iff \qquad \operatorname{tr} Hf > 0.$$

$\boxed{\text{10.6:8}}$ Finn og klassifisér alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = yxe^{-y}$$

$\boxed{\text{10.6:9}}$ Finn og klassifisér alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = x \cos y.$$

$\boxed{\text{10.6:12}}$ La a og b være to konstanter og la $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = ax^2 + by^2.$$

a) Vis at $\nabla f(0, 0) = \mathbf{0}$.

b) Finn betingelsene på a og b slik at (0,0) er henholdsvis et lokalt minimum, maksimum og et sadelpunkt.

$\boxed{\text{10.6:19}}$ Finn absolutt maksimum til funksjonen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = 2xy - x^2y - xy^2$$

der domenet er trekanten

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$

(tegn figur!)

$\boxed{\text{10.6:26}}$ Anta $f(x, y)$ har et horisontalt tangentplan i (0,0). Kan du konkludere at f har et lokalt ekstremalpunkt i (0,0)?

$\boxed{\text{10.6:29}}$ Finn det maksimale volumet en rektangulær boks med seks sider kan ha, når overfatearealet er $A = 48\ \mathrm{m}^2$.

$\boxed{\text{10.6:33}}$ Avstanden fra origo (0,0,0) til punktet (x, y, z) er $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Finn den minste avstanden mellom et punkt i planet

$$x + y + z = 1 \tag{1}$$

og origo. (*Hint*: Minimér **kvadratet** av avstanden.)

$\boxed{\text{10.6:34}}$ Gitt den symmetriske matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

der a, b og c er reelle tall. Vis at egenverdiene til A er reelle.