MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

Oppgaver fra boken:

$$10.4 : 10, 18, \mathbf{28}, \mathbf{36}, \mathbf{44}$$

$$10.5 : 1, \mathbf{12}, 17, \mathbf{28}, \mathbf{36}, \mathbf{43}$$

Det er oppgavene i **boldface** som skal leveres inn:

$\boxed{\text{10.4:10}}$ Finn ligningen til tangentplanet i $(x_0, y_0) = (1, 1)$ til funksjonen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

Løsning:
$z_0 = f(1, 1) = \ln 2$ og

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1,$$

så

$$\begin{aligned}
z &= f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\
&= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= \ln 2 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1) \\
&= x + y + \ln 2 - 2.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{10.4:18}}$ Finn lineariseringen til

$$f(x, y) = 2xy$$

i $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Løsning:
$f(1,-1) = -2$ og

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 2,$$

så

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= -2 - 2(x-1) + 2(y+1) \\ &= -2x + 2y + 2. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{10.4:28}}$ Finn lineariseringen til

$$f(x,y) = \tan(2x - 3y^2)$$

i (0,0) og bruk den til å finne en tilnærming til $f(0.03, 0.05)$. Sammenlign med den eksakte verdien av $f(0.03, 0.05)$.

Løsning:
$f(0,0) = 0$ og

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{\cos^2(2x-3y^2)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-6y}{\cos^2(2x-3y^2)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

så

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= 0 + 2(x-0) + 0(y-0) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

$$L(0.03, 0.05) = 0.06 \approx 0.053 = f(0.03, 0.05).$$

$\boxed{\text{10.4:36}}$ Finn Jacobi-matrisen til

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ e^{-x^2} \end{pmatrix}.$$

Løsning:
La $f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ og $f_2(x,y) = e^{-x^2}$. Jacobi-matrisen til $\mathbf{f}$ er da

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -2xe^{-x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{10.4:44}}$ Finn lineariseringen til

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x/y \\ 2xy \end{pmatrix}$$

i $\mathbf{x}_0 = (-1,1)^T$ og bruk den til å finne en tilnærming til $\mathbf{f}(-0.9, 1.05)$. Sammenlign med den eksakte verdien av $\mathbf{f}(-0.9, 1.05)$.

Løsning:
Vi har at $\mathbf{f}(-1,1) = (-1,-2)^T$.

La $f_1(x,y) = x/y$ og $f_2(x,y) = 2xy$. Jacobi-matrisen til $\mathbf{f}$ er da

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

og

$$D\mathbf{f}(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lineariseringen av $\mathbf{f}$ i $\mathbf{x}_0 = (-1,1)^T$ blir da

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+1+y-1 \\ 2x+2-2y+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y-1 \\ 2x-2y+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}(-0.9, 1.05) = \begin{pmatrix} -0.85 \\ -1.9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.857 \\ -1.89 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(-0.9, 1.05).$$

$\boxed{\text{10.5:1}}$ La $f(x,y) = x^2 + y^2$ der $x(t) = 3t$ og $y(t) = e^t$. Finn $w'(\ln 2)$ når

$$w(t) = f(x(t), y(t)).$$

Løsning:

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= 2x(t)3 + 2y(t)e^t \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} w'(\ln 2) &= 6x(\ln 2) + 2y(\ln 2)e^{\ln 2} \\ &= 18\ln 2 + 2e^{\ln 2}e^{\ln 2} \\ &= 18\ln 2 + 8. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{10.5:12}}$ Finn $\frac{dy}{dx}$ når

$$\cos(x^2 + y^2) = \sin(x^2 - y^2).$$

Løsning:
La $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$F(x, y) = \sin(x^2 - y^2) - \cos(x^2 + y^2).$$

Anta y er en funksjon av x, dvs. $y = y(x)$. Da er $0 = F(x, y(x))$ for alle x og

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x, y(x)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

og såfremt $\frac{\partial F}{\partial y}(x, (y(x))$ ikke er null, er

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \\ &= -\frac{2x\cos(x^2 - y^2) + 2x\sin(x^2 + y^2)}{-2y\cos(x^2 - y^2) + 2y\sin(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{x}{y} \cdot \frac{\cos(x^2 - y^2) + \sin(x^2 + y^2)}{\cos(x^2 - y^2) - \sin(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Kan dette forenkles videre?

$\boxed{\text{10.5:17}}$ Finn gradienten til

$$f(x, y) = x^3 y^2.$$

Løsning:
Vi har at $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y$, så gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3x^2y^2, 2x^3y).$$

$\boxed{\text{10.5:28}}$ Finn den retningsderiverte av

$$f(x, y) = x^3 y^2$$

i $(x_0, y_0) = (2, 3)$ i retningen av vektoren $(-2, 1)$.

Løsning:

La

$$\mathbf{u} = \frac{(-2, 1)^T}{|(-2, 1)^T|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den retningsderiverte av f i (x_0, y_0) i retning $\mathbf{u}$ er da

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) &= \nabla f(x_0, y_0)\mathbf{u} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(3x_0^2y_0^2, 2x_0^3y_0)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{-6x_0^2y_0^2 + 2x_0^3y_0}{\sqrt{5}} \\
&= 2x_0^2y_0\frac{-3y_0 + x_0}{\sqrt{5}} \\
&= 2\cdot 2^2 3\frac{-3\cdot 3 + 2}{\sqrt{5}} \\
&= -\frac{168}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{10.5:36}}$ I hvilken retning øker

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

mest i punktet $(0, \pi/2)$?

Løsning:
Funksjonen øker mest i retningen til gradienten. Dvs i retning

$$\begin{aligned}
\nabla f(0, \pi/2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x,y)=(0,\pi/2)} \\
&= (e^x \cos y, -e^x \sin y)\Big|_{(x,y)=(0,\pi/2)} \\
&= (0, -1).
\end{aligned}$$

Altså i negativ y-retning.

$\boxed{\text{10.5:43}}$ Se oppgaveteksten i boken. Vi skal finne gradienten til

$$f(x, y) = \frac{4}{|x| + |y| + 1}$$

i punktet $(3, 1)$.

Løsning:
For å løse denne oppgaven trenger vi å derivere funksjonen $|x|$. Det gjøres kanskje enklest

ved å bruke at $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}|x| &= \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x}{|x|} \\ &= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Merk at $\frac{x}{|x|}$ ikke er definert for $x = 0$, så $|x|$ er ikke deriverbar i $x = 0$. Vi finner nå at gradienten er

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \left(-\frac{4\frac{x}{|x|}}{(|x|+|y|+1)^2}, -\frac{4\frac{y}{|y|}}{(|x|+|y|+1)^2}\right) \\ &= -\frac{4}{(|x|+|y|+1)^2}\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right)\end{aligned}$$

for alle x og y utenfor koordinataksene. Dermed er

$$\nabla f(3,1) = -\frac{4}{25}(1,1).$$