MA0002

9.1.1 ① $x - y = 1$
② $x - 2y = -2$, dette er det samme som

$y = x - 1$,
$y = 1 + \frac{x}{2}$. Vi skal finne krysningspunktet, og må da løse

$x - 1 = 1 + \frac{x}{2}$, som gir $\frac{x}{2} = 2$, $x = 4$.

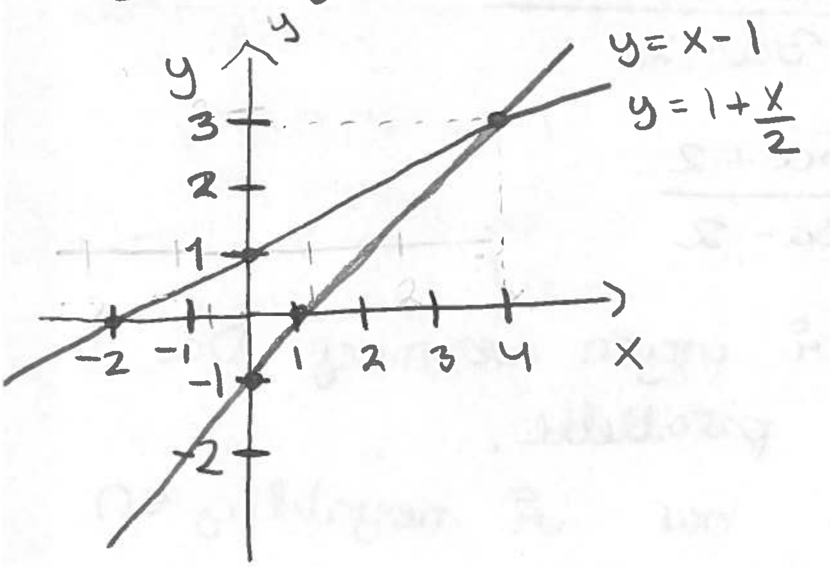
Vi setter $x=4$ inn i $y = x-1$ og får

$y = 4 - 1 = 3$.

Krysningspunktet blir dermed $(4,3)$.

I tillegg kan vi se at ① krysser y-aksen i $(0,-1)$ og x-aksen i $(1,0)$, ② krysser y-aksen i $(0,1)$ og x-aksen i $(-2,0)$.

Dette gir:



Vi ser at linjene krysser i $(4,3)$, noe som stemmer med løsningen vi fikk.

9.1.6

a) Vi skal finne løsningen til

$$-2x + 3y = 5$$
$$ax - y = 1 \quad , \text{ vi skriver om:}$$

① $y = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}x$, og setter høyresidene

② $y = ax - 1$ lik hverandre:

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3}x = ax - 1$$

$$ax - \frac{2}{3}x = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$

$$\left(a - \frac{2}{3}\right)x = \frac{8}{3}$$

$$\underline{x = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{a - 2/3} = \frac{8}{3a-2}}$$

så $y = ax - 1 = \frac{8a}{3a-2} - 1$

$$= \frac{8a - 3a + 2}{3a-2}$$

$$= \frac{5a+2}{3a-2}$$

b) for $a = 2/3$ har vi ingen løsning. Da vil linjene være parallelle.
for alle andre a har vi nøyaktig en løsning. Vi vil aldri ha uendelig mange løsninger siden ① og ② krysser y-aksen i ulike punkt og kan derfor ikke være identiske

9.1.9 $2x - y = 3$
$x - 3y = 7$

Vi vil eliminere x i den nederste likningen for å få systemet på "upper triangular form".

(R_1) $2x - y = 3$
(R_2) $x - 3y = 7$, og dette blir:

(R_1) $2x - y = 3$ (R_3)

$(R_2) - \frac{1}{2}(R_1)$ $0 - \frac{5}{2}y = \frac{11}{2}$ (R_4)

Fra (R_4) vet vi da at $y = -\frac{11}{5}$, og

(R_3) gir da $x = \frac{1}{2}(3+y)$

$= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{11}{5}\right) = \frac{2}{5}$,

så $\underline{y = -11/5 \,, x = 2/5}$

9.1.20 Vi skal løse

$$2x - 3y + z = -1 \quad (R_1)$$
$$x + y - 2z = -3 \quad (R_2)$$
$$3x - 2y + z = 2. \quad (R_3)$$

Vi reduserer systemet til en øvre triangulær form:

$(R_3) - 3(R_2)$: $0 - 5y + 7z = 11$

$(R_1) - 2(R_2)$: $0 - 5y + 5z = 5$, og vi kan erstatte (R_1) og (R_3) med de nye likningene:

$$-5y + 5z = 5$$
$$x + y - 2z = -3$$
$$-5y + 7z = 11$$

, vi bytter plass på de to øverste likningene:

$$x + y - 2z = -3 \quad ①$$
$$-5y + 5z = 5 \quad ②$$
$$-5y + 7z = 11 \quad ③$$

, vi trekker ② fra ③ og står igjen med

$$x + y - 2z = -3 \quad ①$$
$$-5y + 5z = 5 \quad ②$$
$$0 + 2z = 6 \quad ③$$

, og dermed kan vi løse:

③ $z = \frac{6}{2} = 3$,

② $-5y + 5 \cdot 3 = 5$

$-5y = 5 - 15 = -10$

$y = \frac{-10}{-5} = 2$,

① $x + 2 - 2 \cdot 3 = -3$

$x = -3 - 2 + 6$

$x = 1$, og dermed:

$\underline{x = 1,\ y = 2,\ z = 3}$

9.1.21 Skal løse

$$5x - y + 2z = 6 \quad (R_1)$$
$$x + 2y - z = -1 \quad (R_2)$$
$$3x + 2y - 2z = 1 \quad (R_3).$$ Vi har

$(R_3) - 3(R_2)$: $0 - 4y + z = 4$

$(R_1) - 5(R_2)$: $0 - 11y + 7z = 11$, og erstatter

$(R_1), (R_3)$ med disse:

$$0 - 11y + 7z = 11$$
$$x + 2y - z = -1$$
$$0 - 4y + z = 4$$
, vi bytter plass

$$x + 2y - z = -1$$
$$-11y + 7z = 11$$
$$-4y + z = 4$$
, vi ganger den nederste likningen med $\frac{11}{4}$:

$$(-4y + z = 4) \cdot \frac{11}{4}$$

$-11y + \frac{11}{4}z = 11$, og trekker denne fra den midterste likningen:

$$(-\cancel{11y} + 7z - (-\cancel{11y} + \tfrac{11}{4}z)) = 11 - 11$$
$$7z - \frac{11}{4}z = 0$$
$$17z = 0$$

Systemet blir da:

$$x + 2y - z = -1$$
$$-4y + z = 4$$
$$17z = 0,$$
(byttet plass på rad 2 og 3)

Så $z = 0$, gir

$-4y = 4$, $y = -1$, som

gir $x + 2\cdot(-1) = -1$

$$x - 2 = -1$$
$x = -1 + 2 = 1$, og dermed er løsningen

$\underline{z = 0,\ y = -1,\ x = 1}$

9.1.25 systemet

$$\begin{aligned} -x - 2y + 3z &= -9 \\ 2x + y - z &= 5 \\ 4x - 3y + 5z &= -9 \end{aligned}$$

har utvidet matrise

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & -9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) \\ (R_3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 5 & -13 \\ 0 & -11 & 17 & -45 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) + 2(R_1) \\ (R_3) + 4(R_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & -4/3 & 8/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1) \\ (R_2) + 2(R_1) \\ (R_3) + 4(R_1) - \frac{11}{3}\big((R_2) + 2(R_1)\big) \end{array}$$

så systemet blir:

$$\begin{aligned} -x - 2y + 3z &= -9 \\ -3y + 5z &= -13 \\ -\tfrac{4}{3}z &= 8/3 \end{aligned}$$

$$z = \frac{8/3}{-4/3} = -2,$$

$$-3y + 5(-2) = -13$$
$$-3y - 10 = -13$$
$$-3y = -3$$
$$y = 1$$

$$-x - 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) = -9$$
$$-x - 2 - 6 = -9$$
$$-x = -1$$
$$x = 1, \quad \text{så}$$

$$\underline{x = 1,\ y = 1,\ z = -2}$$

I de tre neste oppgavene skal vi bruke

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9.2.7 skal finne $2A + 3B - C$:

$$2A+3B-C = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrise multiplisert med skalar

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & -3 & 12 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & -9 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

addisjon av matriser

$$= \begin{bmatrix} 2+15 & 6-3 & -2+12 \\ 4+6 & 8+0 & 2+3 \\ 0+3 & -4+(-9) & 4+(-9) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

subtraksjon av matriser

$$= \begin{bmatrix} 17-(-2) & 3-0 & 10-4 \\ 10-1 & 8-(-3) & 5-1 \\ 3-0 & -13-0 & -5-2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 19 & 3 & 6 \\ 9 & 11 & 4 \\ 3 & -13 & -7 \end{bmatrix}}$$

9.2.8

$$3C - B + \frac{1}{2}A$$

$$= 3\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6-5+1/2 & 0-(-1)+3/2 & 12-4-1/2 \\ 3-2+1 & -9-0+2 & 3-1+1/2 \\ 0-1+0 & 0-(-3)-1 & 6-(-3)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -21/2 & 5/2 & \frac{15}{2} \\ 2 & -7 & 5/2 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -21 & 5 & 15 \\ 4 & -14 & 5 \\ -2 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

9.2.9 Skal finne D slik at

$A+B+C+D=0$, dvs. at

$D=-(A+B+C)$

$$A+B+C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+5-2 & 3-1+0 & -1+4+4 \\ 2+2+1 & 4+0-3 & 1+1+1 \\ 0+1+0 & -2-3+0 & 2-3+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{så}$$

$$D = -\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

9.2.15

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$ Vet at $a'_{ij} = a_{ji}$, så

den transponerte blir

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$