MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2014

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 12

$\boxed{1}$ Norm og konjugerte:

Den **konjugerte** av et kompleks tall $z = x + iy$ er definert som

$$\overline{z} = x - iy.$$

Normen av et kompleks tall $z = x + iy$ er definert som det ikke-negative reelle tallet

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La $z = 3 - \sqrt{3}i$ og $w = -2 + i$

a) Finn $\overline{z}$ og $|z|$. Beregn summen $z + \overline{z}$ og konkluder med at $z + \overline{z} = 2\Re(z)$. (med $\Re(z)$ menes realverdien til z)

b) Finn $\overline{w}$ og $|w|$. Beregn produktet $w\overline{w}$ og konkluder med at $w\overline{w} = |w|^2$.

c) Vis at $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$ og at $\bar{z}\bar{w} = \overline{zw}$.

$\boxed{2}$ La $w = u + iv$ være et kompleks tall ulik 0. Det komplekse tallet $\frac{1}{w}$ er definert som

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|^2}\overline{w}.$$

a) Vis at $\frac{1}{w}w = 1$.

b) Løs ligningen

$$az + b = c$$

der $a = -2 + i$, $b = 1 - 3i$ og $c = 2$.

$\boxed{3}$ Komplekse vektorer:

En kompleks vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{C}^n$ er en vektor der alle komponentene w_i er komplekse tall.

Den konjugerte $\overline{\mathbf{w}}$ av en kompleks vektor $\mathbf{w}$ er definert som

$$\overline{\mathbf{w}} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n)^T \in \mathbb{C}^n$$

La

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Skriv $\mathbf{w}$ på formen $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ der $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

b) Finn $\overline{\mathbf{w}}$.

$\boxed{4}$ For et kompleks tall $z = x + iy$, er e^z definert som det komplekse tallet

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

a) Vis at

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

for alle komplekse tall z og w.

b) Vis at

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}.$$

$\boxed{5}$ La et lineært system av differensialligninger være gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{x}$$

der

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til systemet og avgjør om likevektspunktet $(0, 0)^T$ er stabilt og hvilken type det er. (Dvs. node, sadel eller spiral)

b) Finn tilhørende egenvektorer til de to egenverdiene.

c) Finn den generelle komplekse løsningen til systemet.

d) Finn løsningen til systemet som oppfyller initsialbetingelsen $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.