Eksamen MA0002 vår 2014

Oppg. 1

a) $$\frac{dy}{dx} = y^2 + y - 2$$
$$= (y+2)(y-1) =: g(y)$$

Likevektslösningene er altså

$$\underline{\underline{y_1 = -2}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{y_2 = 1}}.$$

$$g'(y) = 2y + 1$$
$$g'(y_1) = -3 < 0$$
$$g'(y_2) = 3 > 0$$

$\supset$: $y_1 = -2$ $\underline{\underline{\text{er stabil}}}$ og $y_2 = 1$ $\underline{\underline{\text{er ustabil}}}$

Oppg 1

b) Ligningen er separabel:

$$\frac{dy}{y^2+y-2} = dx$$

Delbrøkoppsp.:

$$\frac{1}{y^2+y-2} = \frac{1}{(y+2)(y-1)}$$

$$= \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1 = A(y-1) + B(y+2)$$

$$= (A+B)y - A + 2B$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A+B=0 \quad \text{og} \quad -A+2B=1$$

$\therefore$ $3B=1$, $\underline{B=\frac{1}{3},\ A=-\frac{1}{3}}$

Dermed er

$$x + C = \int dx$$

$$= \int \frac{dy}{y^2+y-2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|y-1| - \ln|y+2|\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y-1}{y+2}\right|$$

Vi har nå at

$$3x + C = \ln \left| \frac{y-1}{y+2} \right|$$

$$e^{3x+C} = \left| \frac{y-1}{y+2} \right|$$

$$Ke^{3x} = \frac{y-1}{y+2}.$$

Bruker init.: $y(0) = -1$: $K = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$

$$-2e^{3x}(y+2) = y-1$$

$$1 - 4e^{3x} = y(1+2e^{3x})$$

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1-4e^{3x}}{1+2e^{3x}}}}$$

c) $$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-4e^{3x}}{1+2e^{3x}}$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1-4e^{3x}}{1+2e^{3x}}$$

Deler på e^{3x} over og under

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-3x} - 4}{e^{-3x} + 2}$$

$$= \frac{0-4}{0+2} = \underline{\underline{-2}}$$

<u>Graf d)</u> er den eneste grafen som har disse grensene.

Oppg 2

La $x = \#$ kronestykker

$y = \#$ 5-kroner.

lineært lign. sys.:

$$4.35x + 7.85y = 601$$
$$1.7x + 2y = 197.5$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{197.5 - 1.7x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 601 = 4.35x + 7.85 \cdot \frac{197.5 - 1.7x}{2}$$

$$\overset{\text{CALC}}{=} -\frac{929}{400}x + \frac{12403}{16}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\frac{12403}{16} - 601}{929} 400$$

$$= \underline{75}$$

$$y = \frac{197.5 - 1.7 \cdot 75}{2}$$

$$= \underline{35}$$

Stabelen er verdt

$$1 \cdot 35 + 5 \cdot 35 = \underline{\underline{250 \text{ kr}}}$$

Oppg. 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $0 = \det(A - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4$$

$$= -6 - \lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Egenverdiene er $\underline{\underline{\lambda_1 = -1 < \lambda_2 = 2}}$.

Finner egenvektorer:

$$\bar{0} = (A - \lambda_1 I)\bar{u}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y.$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ er en egenvektor til $\lambda_1 = -1$

$$\bar{0} = (A - \lambda_2 I)\bar{u}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 4y$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ er en egenvektor til $\lambda_2 = 2$

b)

$$U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Det er åpenbart at

$$\underline{\underline{\Lambda^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}}.$$

Vi har at $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, så

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

$$U\Lambda U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}}$$

Oppg. 3

c)

$$(BCB^{-1})^n = BCB^{-1}BCB^{-1} \cdots BCB^{-1}$$
$$= BCICI \cdots ICB^{-1}$$
$$= BC \cdots CB^{-1}$$
$$= BC^nB^{-1} \qquad II$$

Ser fra b) at $U\Lambda U^{-1} = A$, så

$$A^6 = (U\Lambda U^{-1})^6 = U\Lambda^6 U^{-1}.$$

Nå er

$$\Lambda^6 = \begin{pmatrix} (-1)^6 & 0 \\ 0 & 2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}, \text{ så}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} U^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 256 \\ 1 & 64 \end{pmatrix} U^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 256 \\ 1 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -255 & 252 \\ -63 & 60 \end{pmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -85 & 84 \\ -21 & 20 \end{pmatrix}}}$$

Oppg. 4

a) • løper x km langs elvebredden

• svømmeturen er

$$\sqrt{(3/25)^2 + (y-x)^2} \text{ km}$$

• den siste etappen er

$$\sqrt{(1/8)^2 + (2/5-y)^2} \text{ km.}$$

Tiden det tar å komme seg fra START til GOAL er derfor

$$T(x,y) = \frac{x}{13} + \frac{1}{5}\sqrt{(3/25)^2 + (y-x)^2} + \frac{1}{12}\sqrt{(1/8)^2 + (2/5-y)^2} \text{ timer}$$

Gradienten til T er gitt ved

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right), \text{ der}$$

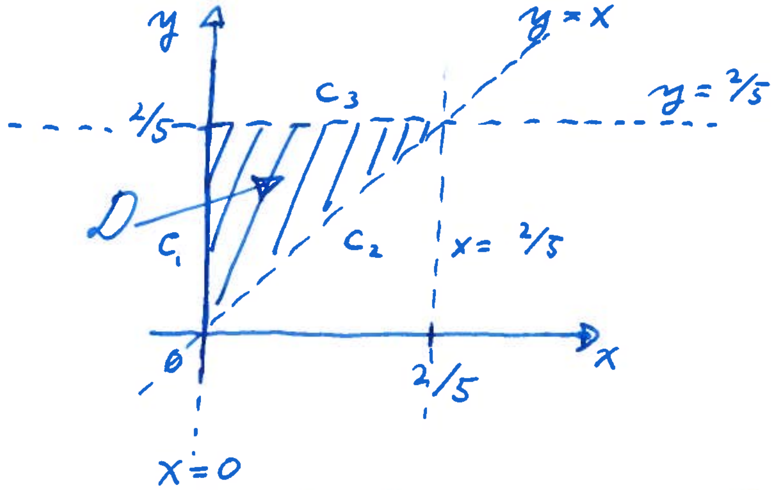
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{13} + \frac{1}{5}\frac{\cancel{2}(y-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(3/25)^2 + (y-x)^2}} + 0$$

$$= \frac{1}{13} - \frac{y-x}{5\sqrt{(3/25)^2 + (y-x)^2}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 + \frac{1}{5}\frac{\cancel{2}(y-x)}{\cancel{2}\sqrt{(3/25)^2 + (y-x)^2}} + \frac{1}{12}\frac{\cancel{2}(2/5-y)^{\cancel{1}}(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(1/8)^2 + (2/5-y)^2}}$$

$$= \frac{y-x}{5\sqrt{(3/25)^2 + (y-x)^2}} - \frac{2/5-y}{12\sqrt{(1/8)^2 + (2/5-y)^2}}$$

b)



Randen til D består av de tre linjestykkene c_1, c_2 og c_3. Det er oppgitt at min. til T langs c_1 er 0.05697. Sjikker c_2 og c_3:

c_2: $y = x$, $0 \le x \le 2/5$

$$g_2(x) = T(x,x) = \frac{x}{13} + \frac{1}{5}\frac{3}{25} + \frac{1}{12}\sqrt{(1/8)^2 + (2/5 - x)^2}$$

$$g_2'(x) = \frac{1}{13} - \frac{2/5 - x}{12\sqrt{(1/8)^2 + (2/5-x)^2}}.$$

Kandidater for min langs randen er

$$\boxed{\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}}$$

og ev. der $g_2'(x) = 0$. (Trenger ikke å sjekke $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ettersom det punktet ligger på c_1)

$$0 = g_2'(x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{13} = \frac{2/5 - x}{12\sqrt{(1/8)^2 + (2/5-x)^2}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(1/8)^2 + (2/5 - x)^2} = \frac{13}{12}(2/5 - x)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(1/8)^2 + (2/5 - x)^2 = \frac{13^2}{12^2}(2/5 - x)^2$$ fordi $2/5 - x \ge 0$

$$\Leftrightarrow$$

$$(2/5 - x)^2\left(\frac{13^2}{12^2} - 1\right) = (1/8)^2$$

$$(2/5 - x)^2 \overset{\Leftrightarrow}{=} \frac{(1/8)^2}{13^2/12^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{8^2} \frac{12^2}{13^2 - 12^2}$$

$\left(\begin{aligned} &13^2 - 12^2 \\ &= 25 = 5^2 \end{aligned} \right)$

$$\Leftrightarrow \quad 2/5 - x = \frac{12}{8 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

$$\supset: \quad x = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

Kandidat: $\boxed{\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}}$

Eneste gjenværende kandidat er ev. kritisk punkt langs e_3: $0 \leq x \leq 2/5$, $y = 2/5$

$$g_3(x) = T(x, 2/5)$$

$$= \frac{x}{13} + \frac{1}{5}\sqrt{(3/25)^2 + (2/5 - x)^2} + \frac{1}{12 \cdot 8}$$

$$0 = g_3'(x) = \frac{1}{13} - \frac{2/5 - x}{5\sqrt{(3/25)^2 + (2/5 - x)^2}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(3/25)^2 + (2/5 - x)^2} = \frac{13}{5}(2/5 - x)$$

$$(3/25)^2 + (2/5 - x)^2 = \frac{13^2}{5^2}(2/5 - x)^2$$

$$(2/5 - x)^2\left(\frac{13^2}{5^2} - 1\right) = (3/25)^2$$

$$(2/5 - x)^2 = \frac{1}{25^2} \frac{3^2}{\frac{13^2}{5^2} - 1}$$

$$= \frac{3^2 \cdot 5^2}{25^2(13^2 - 5^2)} = \frac{3^2}{5^2 \cdot 12^2}$$

$$\tfrac{2}{5} - x = \frac{3}{5\cdot 12} = \frac{1}{20}$$

Vi har hele tiden brukt at $\tfrac{2}{5} - x \geq 0$

$$ɔ: \quad x = \frac{2}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$$

Kandidat: $\hat{x}_3 = \begin{pmatrix} 7/20 \\ 2/5 \end{pmatrix}$.

Sammenligner:

$$T(\hat{x}_1) = T(4/5, 2/5)$$

$$= \frac{2}{5\cdot 13} + \frac{1}{5}\sqrt{(3/25)^2} + \frac{1}{12}\sqrt{1/8^2}$$

$$= \frac{2}{5\cdot 13} + \frac{3}{5\cdot 25} + \frac{1}{12\cdot 8}$$

$$\overset{\text{CALC}}{=} \frac{3517}{4875} \approx 0,7214$$

$$T(\hat{x}_2) = T(1/10, 1/10)$$

$$= \frac{1}{10\cdot 13} + \frac{1}{5}\,\frac{3}{25} + \frac{1}{12}\sqrt{(1/8)^2 + (3/10)^2}$$

$$\overset{\text{CALC}}{=} \frac{9169}{156000} \approx 0,0587$$

$$T(\hat{x}_3) = T(7/20, 2/5)$$

$$= \frac{7}{20\cdot 13} + \frac{1}{5}\sqrt{(3/25)^2 + (1/20)^2} + \frac{1}{12\cdot 8}$$

$$= \frac{9881}{156000} \approx 0.0633$$

<u>Nei</u>. T har ingen mindre verdi enn 0.05697 på randen

Oppg 4

c) Det gjenstår å finne kritiske punkter for T i det indre av D. Ettersom T er kontinuerlig og D er lukket og begrenset, vil min. til T enten finnes i ev. kritiske punkt eller på randen.

$$\bar{0} = \nabla T(x,y) \iff$$

$$\frac{1}{13} = \frac{y-x}{5\sqrt{(3/25)^2+(y-x)^2}} \quad \text{og} \qquad (1)$$

$$\frac{y-x}{5\sqrt{(3/25)^2+(y-x)^2}} = \frac{2/5-y}{12\sqrt{(1/8)^2+(2/5-y)^2}} \qquad (2)$$

(1) er samme ligning som $0=g_3'(x)$ med $y-x$ istedet for $2/5-x$. Altså er

$$y-x = \frac{1}{20} \qquad (\text{fordi } y-x \geq 0)$$

Ligning (1) gir også at venstre side av (2) er $\frac{1}{13}$ og ligning (2) blir da samme ligning som $0=g_2'(x)$ med $\frac{2}{5}-y$ istedet for $2/5-x$. Altså er

$$2/5-y = \frac{3}{10} \qquad (\text{fordi } 2/5-y \geq 0)$$

Det eneste kritiske punktet til T er

$$y = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$x = y - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$$

og verdien til T i det kritiske punktet er

$$T\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{20 \cdot 13} + \frac{1}{5}\sqrt{(3/25)^2 + (1/20)^2} + \frac{1}{12}\sqrt{(1/8)^2 + (3/10)^2}$$

$$= \frac{8881}{156000} \approx 0{,}05693$$

som er mindre enn minste verdi på randen.

Abs. min. til T ligger i $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}\right) \in D$ og det er mulig å komme seg fra START til GOAL på

$$\frac{8881}{156000} \text{ timer} = 3 \text{ min. } 24.95 \text{ sek}$$