KOMPLEKSE TALL

KARL K. BRUSTAD

1. Definisjoner og notasjon

Definisjon 1. Et **kompleks tall** er et objekt på formen

$$x + iy$$

der x og y er reelle tall og kalles henholdsvis **realdelen** og **imaginærdelen** til det komplekse tallet. Symbolet i kalles **den imaginære enhet**.

To komplekse tall, $x+iy$ og $u+iv$ er **like** hvis og bare hvis de har samme realdel og imaginærdel. Altså

$$x + iy = u + iv \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = u \text{ og } y = v.$$

Definisjon 2 (Algebra med komplekse tall)**.** La $a+ib$ og $c+id$ være to komplekse tall.

- **Summen** av de to komplekse tallene er et kompleks tall gitt ved
$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$
- **Produktet** av de to komplekse tallene er et kompleks tall gitt ved
$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Vi kan la én bokstav representere et kompleks tall, som f.eks. $z = x + iy$.

Teorem 1. La $z = x + iy$ og $w = u + iv$ være to komplekse tall. Da er

(1) $z + w = w + z$
(2) $zw = wz$
(3) $(0 + i0) + z = z$
(4) $(1 + i0)z = z$

Bevis. (1)

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) \\ &= (x + u) + i(y + v) \\ &= (u + x) + i(v + y) \\ &= (u + iv) + (x + iy) \\ &= w + z. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} zw &= (x + iy)(u + iv) \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) \\ &= (ux - vy) + i(uy + vx) \\ &= (u + iv)(x + iy) \\ &= wz. \end{aligned}$$

Date: 6. april 2014.

(3)

$$\begin{aligned}(0+i0)+z &= (0+i0)+(x+iy)\\ &= (0+x)+i(0+y)\\ &= x+iy\\ &= z.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(1+i0)z &= (1+i0)(x+iy)\\ &= (1x-0y)+i(1y+0x)\\ &= x+iy\\ &= z.\end{aligned}$$

□

Notasjon 1. Hvis imaginærdelen til et kompleks tall er 0, skriver vi a istedet for $a+i0$. Spesielt skriver vi 0 istedet for $0+i0$.

Hvis realdelen til et kompleks tall er 0, skriver vi ib istedet for $0+ib$. Spesielt skriver vi i istedet for $0+i1$. Teorem 1, del (3) og (4) sier altså at $0+z=z$ og at $1z=z$.

For et kompleks tall z, mener vi med $-z$ det komplekse tallet $-1z$ og med $w-z$ mener vi det komplekse tallet $w+-z$.

Teorem 2. For alle komplekse tall z, w og v, er

(1) $z+(w+v)=(z+w)+v$
(2) $z(wv)=(zw)v$
(3) $z(w+v)=zw+zv$
(4) $0\mathrm{z}=0$.

Bevis. ... □

Merk at

$$\begin{aligned}i^2 = ii &= (0+i1)(0+i1)\\ &= (0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)\\ &= -1\end{aligned}$$

og det er ikke nødvendig å huske definisjonen av produktet av to komplekse tall fordi pga. teorem 1 og 2 er

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= (a+ib)c+(a+ib)id\\ &= ac+ibc+iad+i^2bd\\ &= ac-bd+i(ad+bc).\end{aligned}$$

Hvis vi lar $\mathbb{C}$ betegne mengden av alle komplekse tall, kan mengden av alle reelle tall, $\mathbb{R}$, ses på som en delmengde av $\mathbb{C}$. Nemlig den delmengden av de komplekse tallene med imaginærdel lik null.

Av denne grunn kan adjektivene *kompleks* og *reell* ofte sløyfes og vi kaller et element $z\in\mathbb{C}$ rett og slett for et *tall*.

Det er altså ikke nødvendig å bruke parenteser rundt realdelen for å skille mellom addisjon av reelle og komplekse tall ettersom alle algebraiske operasjoner kan sees på som operasjoner på komplekse tall.

2. Det komplekse plan

Hvert kompleks tall $z = x+iy$ kan åpenbart tilordnes nøyaktig ett punkt (x, y) i planet $\mathbb{R}^2$ ettersom to punkter i planet er like hvis og bare hvis begge koordinatene er like.

F.eks. vil tallet $1 = 1 + 0i$ tilsvare punktet $(1, 0)^T$ og tallet $i = 0 + 1i$ vil tilsvare punktet $(0, 1)^T$ og hvis $z = x+iy$ og $w = u+iv$ så vil tallet $z+w = x+u+i(y+v)$ tilsvare punktet

$$\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

og vi ser at **addisjon av komplekse tall tilsvarer vektoraddisjon i planet**.

Vi skal nå se at **produktet** av to tall kan tilordnes et punkt i planet som også har en enkel geometrisk beskrivelse. La $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ være et punkt i planet. Da er

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

der $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er avstanden fra origo til $(x, y)^T$ (ev. lengden av vektoren), og der θ er vinkelen mellom den positive x-aksen og linjen fra origo til $(x, y)^T$. Vi sier at (r, θ) er **polarkoordinater** til punktet $(x, y)^T$.

La $(u, v)^T \in \mathbb{R}^2$ også være et punkt i planet og anta at dette punktet har polarkoordinater (s, ϕ). De to punktene tilsvarer to komplekse tall

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

og

$$w = u + iv = s(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Nå er

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos\theta + i\sin\theta)s(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= rs\big(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\big) \\ &= rs\big(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\big) \end{aligned}$$

der vi i den tredje likheten har brukt en velkjent trigonometrisk identitet. Altså tilsvarer tallet zw, vektoren i planet med polarkoordinater $(rs, \theta + \phi)$. Dvs. den vektoren i planet som har en **lengde lik produktet av lengdene** til $(x, y)^T$ og $(u, v)^T$ og **vinkel lik summen av vinklene** til $(x, y)^T$ og $(u, v)^T$.

Pga. dette en-til-en-forholdet mellom $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$, er det ikke alltid nødvendig å presisere om vi snakker om et kompleks tall eller et punkt i planet.

3. Komplekse funksjoner

Med en **kompleks funksjon** $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, der $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$, mener vi en regel f som tilordner for hvert tall $z \in \mathcal{D}$ et unikt tall $f(z) \in \mathbb{C}$.

F.eks vil funksjonen f gitt ved $f(z) = 2z$ dobble lengden til z, men bevare retningen, mens funksjonen g gitt ved $g(z) = iz$ vil bevare lengden, men rotere z $90°$ mot klokken.

3.1. Noen viktige funksjoner.

Den **konjugerte**, $\bar{z}$, av et tall $z = x + iy \in \mathbb{C}$ er speilingen av z om x-aksen. Dvs.

$$\bar{z} = x - iy.$$

Modulusen eller **normen**, $|z|$, til et tall $z = x + iy \in \mathbb{C}$ er lengden av den tilsvarene vektoren. Dvs.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Merk at $|z|^2 = z\bar{z}$ (regn ut!) og det kan også vises at $|zw| = |z||w|$.

Argumentet, $\operatorname{Arg} z$, til et tall $z = x + iy \in \mathbb{C}$ er den unike vinkelen $\theta \in (-\pi, \pi]$ slik at

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

der $r = |z|$. Altså er $(|z|, \operatorname{Arg} z)$ polarkoordinater til z.

Med $\arg z$ (argumentet med liten 'a') mener vi **mengden** av alle vinkler θ slik at $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dvs.

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Merk at det ikke alltid er sant at $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$. F.eks. er

$$0 = \operatorname{Arg} 1 = \operatorname{Arg}((-1)(-1)) \neq \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(-1) = 2\pi.$$

Derimot, har vi alltid at

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w := \{\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Likhetene over er likheter mellom mengder der den andre likheten definerer hva som menes med summen av de to mengdene $\arg z$ og $\arg w$. Selv om $\arg z$ er en mengde, er det ofte vanlig å missbruke notasjonen en tanke og regne med $\arg z$ som om det var et tall. Dette er mulig fordi alle operasjoner mellom tall har sin naturlige tilhørende definisjon av operasjoner mellom mengder, akurat som summen av $\arg z$ og $\arg w$ er definert over.

Kvadratroten, $\sqrt{z}$ til et tall $z = x + iy \in \mathbb{C}$ er det unike tallet w slik at

$$w^2 = z \qquad \text{og} \qquad \operatorname{Arg} w \in (-\pi/2, \pi/2].$$

Gitt et kompleks tall z med polarkoordinater (r, θ), $\theta \in (-\pi, \pi]$, finnes det – lik som i det reelle tilfellet – to tall w og $-w$ slik at $w^2 = z = (-w)^2$, men bare et av dem vil ha et argument i intervallet $(-\pi/2, \pi/2]$.

For hvis $w = \sqrt{z}$, vil w vil ha polarkoordinater $(\sqrt{r}, \theta/2)$, mens $-w$ vil ha polarkoordinater $(\sqrt{r}, \theta/2 \pm \pi)$.

Merk at med denne definisjonen av kvadratrot, er

$$\sqrt{-1} = i$$

fordi $\operatorname{Arg} i = \pi/2 \in (-\pi/2, \pi/2]$, mens $\operatorname{Arg}(-i) = -\pi/2$.

3.2. **Den komplekse eksponensialfunksjonen.** Det er ikke åpenbart hvordan man kan definere et utrykk som

$$a^z$$

der a er et reelt tall, mens z er kompleks. Hva vil det si å opphøye noe i et kompleks tall? For å besvare dette spørsmålet forsøker vi å definere den komplekse eksponensialfunksjonen e^z. Bare konklusjonen, og ikke utledningen, av det følgende er pensum:

For et reellt tall x, er

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

og vi bruker denne identiteten som grunnlag for å definere e^z:

La $z = x + iy \in \mathbb{C}$ og for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$, la

$$c_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Merk at for alle n er c_n et veldefinert kompleks tall. Vi definerer nå $e^z = \lim_{n\to\infty} c_n$ i betydningen

$$e^z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

der $r = \lim_{n\to\infty} |c_n|$ og $\theta \in \lim_{n\to\infty} \arg c_n$.

Vi finner r:

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \left|\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n\right| \\
&= \left|\frac{n+x}{n}+i\frac{y}{n}\right|^n \\
&= \left(\sqrt{\left(\frac{n+x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2}.
\end{aligned}$$

Det følger da at

$$\begin{aligned}
\ln r = \ln\left(\lim_{n\to\infty}|c_n|\right) &= \lim_{n\to\infty}\ln|c_n| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{2/n}, \quad \text{l'Hôp} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-2\frac{x}{n^2}-2\frac{x^2+y^2}{n^3}}{1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}}\left(-\frac{1}{2/n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{x^2+y^2}{n}}{1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Dvs. $r = e^x$.

For et kompleks tall $z = x+iy$ der $x = r\cos\theta \neq 0$ og $y = r\sin\theta$, er

$$\frac{y}{x} = \tan\theta.$$

Så hvis $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, dvs $x > 0$, så er

$$\operatorname{Arg} z = \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nå er $c_n = \left(\frac{n+x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n$, og for store nok n, er $\frac{n+x}{n} > 0$ og

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{n+x}{n}+i\frac{y}{n}\right) = \arctan\left(\frac{y/n}{(n+x)/n}\right) = \arctan\left(\frac{y}{n+x}\right).$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \arg c_n &= \lim_{n\to\infty} \arg\left[\left(\frac{n+x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n \arg\left(\frac{n+x}{n} + i\frac{y}{n}\right) \\
&\ni \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{y}{n+x}\right)}{1/n}, \quad \text{l'Hôp} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{y}{(n+1)^2}}{1+\left(\frac{y}{n+1}\right)^2}\left(\frac{1}{-1/n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{(n+1)^2}y}{1+\left(\frac{y}{n+1}\right)^2} \\
&= y.
\end{aligned}
$$

Altså har vi følgende definisjon:

Definisjon 3. For alle komplekse tall $z = x + iy$ er den **komplekse eksponen-sialfunksjonen** e^z definert som

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

4. Komplekse egenverdier

Vi skal finne løsningene til systemet

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{x} \tag{4.1}$$

når egenverdiene til 2x2-matrisen A har komplekse egenverdier.

Egenverdiene til A er løsningene til ligningen

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(A - \lambda I) \\
&= \lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A
\end{aligned}
$$

og vi antar nå at $\Delta := \operatorname{tr}^2 A - 4\det A < 0$, slik at

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\operatorname{tr} A}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\operatorname{tr} A}{2} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \\
\lambda_2 &= \frac{\operatorname{tr} A}{2} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.
\end{aligned}
$$

Vi ser at $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, så vi lar

$$\lambda := \alpha + i\omega$$

der $\alpha = \frac{\operatorname{tr} A}{2}$ og $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Egenvektoren tilhørende λ er en løsning $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ av ligningen

$$\mathbf{0} = (A - \lambda I)\mathbf{w}.$$

Denne egenvektoren er kompleks og kan skrives på formen

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

der $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Egenvektoren tilhørende egenverdien $\overline{\lambda}$ er $\overline{\mathbf{w}}$ fordi A har reelle elementer, så

$$A\overline{\mathbf{w}} = \overline{A\mathbf{w}} = \overline{\lambda\mathbf{w}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{w}}.$$

Derivasjon av komplekse funksjoner er ikke pensum, men det viser seg at den komplekse vektorfunksjonen $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{w} + c_2 e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{w}} \tag{4.2}$$

er en løsning av (4.1) for alle komplekse konstanter c_1 og c_2. Funksjonen (4.2) er den **generelle komplekse løsningen** av (4.1).

Vi skal nå vise at hvis det er gitt en reell initsialbetingelse til systemet (4.1), så er c_1 og c_2 komplekskonjugerte av hverandre. Dvs hvis $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, så er $c_2 = \overline{c}_1$:

La W være den komplekse 2x2-matrisen med egenvektorene som kolonner. Dvs

$$W = (\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}}).$$

Da er

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = c_1 e^{\lambda 0}\mathbf{w} + c_2 e^{\overline{\lambda} 0}\overline{\mathbf{w}} = c_1\mathbf{w} + c_2\overline{\mathbf{w}} = W\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Men ettersom $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, er $\overline{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$, så vi har også at

$$\mathbf{x}_0 = \overline{\mathbf{x}}_0 = \overline{c_1\mathbf{w} + c_2\overline{\mathbf{w}}} = \overline{c}_2\mathbf{w} + \overline{c}_1\overline{\mathbf{w}} = W\begin{pmatrix} \overline{c}_2 \\ \overline{c}_1 \end{pmatrix}.$$

Dermed er

$$W\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} \overline{c}_2 \\ \overline{c}_1 \end{pmatrix}$$

og på samme måte som i det reelle tilfellet, er W inverterbar fordi egenvektorene er forskjellige, så ved å multiplisere likheten over med W^{-1} fra venstre får vi at $(c_1, c_2)^T = (\overline{c}_2, \overline{c}_1)^T$, altså $c_2 = \overline{c}_1$.

Skriv

$$c := c_1 = a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

For reelle initsialverdier er altså løsningen reell fordi

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= c e^{\lambda t}\mathbf{w} + \overline{c} e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{w}} \\
&= e^{\alpha t}\left(c e^{i\omega t}\mathbf{w} + \overline{c} e^{-i\omega t}\overline{\mathbf{w}}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(c e^{i\omega t}\mathbf{w} + \overline{c e^{i\omega t}\mathbf{w}}\right) \\
&= 2e^{\alpha t}\Re(c e^{i\omega t}\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vi har brukt at $e^{-i\omega t} = \overline{e^{i\omega t}}$ og identiteten $z + \overline{z} = 2\Re z$. For å finne løsningen uttrykt ved sin og cos beregner vi at

$$\begin{aligned}
c e^{i\omega t}\mathbf{w} &= e^{i\omega t}(a + ib)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\
&= (\cos\omega t + i\sin\omega t)(a\mathbf{u} - b\mathbf{v} + i(a\mathbf{v} + b\mathbf{u})) \\
&= \cos\omega t(a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) - \sin\omega t(a\mathbf{v} + b\mathbf{u}) + i(\dots)
\end{aligned}$$

og den **generelle reelle løsningen** av (4.1) er da

$$\mathbf{x}(t) = 2e^{\alpha t}\left[\cos\omega t(a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) - \sin\omega t(a\mathbf{v} + b\mathbf{u})\right] \tag{4.3}$$

der

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\operatorname{tr} A}{2} \\
\omega &= \frac{\sqrt{4\det A - \operatorname{tr}^2 A}}{2} \\
\mathbf{u} + i\mathbf{v} &= \mathbf{w}, \quad \text{er en egenvektor til } \lambda = \alpha + i\omega
\end{aligned}$$

og der a og b tilfredsstiller

$$\mathbf{x}_0 = W\begin{pmatrix} c \\ \bar{c} \end{pmatrix} = (\mathbf{u}+i\mathbf{v}, \mathbf{u}-i\mathbf{v})\begin{pmatrix} a+ib \\ a-ib \end{pmatrix} = \cdots = 2(\mathbf{u},\mathbf{v})\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.$$

5. Eksempel

Vi ønsker å løse initsialverdiproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -x - y, \qquad & x(0) = 1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 2x - 3y, \qquad & y(0) = 1. \end{aligned}$$

Dette kan skrives på matriseform

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

der

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nå er $\operatorname{tr} A = -4$ og $\det A = 5$, så $\alpha = -2$ og

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\det A - \operatorname{tr}^2 A} = \frac{1}{2}\sqrt{20-16} = 1.$$

Dermed kan vi umiddelbart si at likevektspunktet $(0,0)^T$ er en **stabil spiral**. Det gjenstår å finne egenvektoren til $\lambda = \alpha + i\omega$ og konstantene a og b.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda I)\mathbf{w} \\ &= \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1-(-2+i) & -1 \\ 2 & -3-(-2+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi vet at matrisen er singulær, så likheten over holder hvis og bare hvis

$$0 = (1-i)w_1 - w_2.$$

Så hvis $w_1 = t$, må $w_2 = (1-i)t$ og for alle t er $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ en løsning av ligningen. Altså er

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =: \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

en egenvektor til A med tilhørende egenverdi λ.

Fra (4.3) ser vi at $\mathbf{x}(0) = 2(a\mathbf{u} - b\mathbf{v})$, så

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = 2(a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) = 2a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

hvilket gir $a = 1/2$ og $b = 0$. Innsatt i (4.3) blir dette

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= 2e^{\alpha t}\big[\cos\omega t(a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) - \sin\omega t(a\mathbf{v} + b\mathbf{u})\big]\\ &= 2e^{-2t}\big[\cos t\mathbf{u}/2 - \sin t\mathbf{v}/2\big]\\ &= e^{-2t}\left(\cos t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)\\ &= e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t + \sin t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vi sjekker at denne funksjonen virkelig er en løsning av systemet (5.1): For det første oppfyller funksjonen initsialbetingelsen fordi $\mathbf{x}(0) = (1,1)^T$ og ved produktregelen er

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= -2e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t + \sin t\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\sin t + \cos t\end{pmatrix}\\ &= e^{-2t}\begin{pmatrix}-2\cos t - \sin t\\ -\cos t - 3\sin t\end{pmatrix},\end{aligned}$$

som er det samme som

$$\begin{aligned}A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix} e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t + \sin t\end{pmatrix}\\ &= e^{-2t}\begin{pmatrix}-2\cos t - \sin t\\ -\cos t - 3\sin t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$