FAKTABOX

KARL K. BRUSTAD

SAMMENDRAG. Dette notatet er en oppsummering av forventede forkunskaper som er nødvendige til MA0002 vår 2014.

1. Kvadratrot

Kvadratrot er en **funksjon** og kvadratroten av et tall a er definert som det ikke-negative tallet som ganget med seg selv er a. Altså

$$\sqrt{a} = b \qquad \iff \qquad b^2 = a \quad \text{og} \quad b \geq 0.$$

Dvs. at $\sqrt{4} = 2$ og **ikke** -2.

2. Regneregler for eksponenter

La $a, b > 0$ og $x, y \in \mathbb{R}$. Da er

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a > 1 \end{cases}$

Hvis grunntallet a er negativt, må vi være mer forsiktig. Heltallseksponenter går greit, men f.eks. er $(-1)^{1/2} \notin \mathbb{R}$.

3. Regneregler for logaritmer

Den **naturlige logaritmen**, $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, av et tall a er tallet x slik at $e^x = a$ der $e = 2.718...$

En alternativ definisjon av den naturlige logaritmen er

$$\ln a = \int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

La $a, b > 0$ og $x \in \mathbb{R}$. Da er

- $\ln\left(e^x\right) = x$
- $e^{\ln a} = a$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(a^x\right) = x \ln(a)$

Vi har også at

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln x &= \infty \\
\lim_{x\to 0^+} \ln x &= -\infty \\
\ln 1 &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} &= \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ 1, & \lambda = 0 \\ \infty, & \lambda > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

4. Absoluttverdi

La $x \in \mathbb{R}$. **Absoluttverdien** av x betegnes $|x|$ og er definert som

$$
|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}
$$

En alternativ definisjon er $|x| = \sqrt{x^2}$.

- $|x|$ er alltid positiv eller null
- $|x|$ er avstanden fra punktet x til 0 på tallinjen
- $|x - y|$ er avstanden mellom x og y på tallinjen
- Løsningene til ligningen $|x| = a$ der $a \geq 0$ er $x = a$ og $x = -a$
- $|x| < a \quad \iff \quad -a < x < a$
- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$. (trekantulikheten)

5. Derivasjon

Definisjon:

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.
$$

Notasjon for den deriverte:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = f'(x).
$$

Derivasjonsregler for noen vanlige funksjoner:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} C &= 0, && C \text{ konstant} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r &= r x^{r-1} && \text{for alle reelle tall } r \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x &= \frac{1}{x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x &= e^x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x &= \cos x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x &= -\sin x.
\end{aligned}
$$

Derivasjonsregler for sammensatte funksjoner:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Cf(x) &= Cf'(x), && C \text{ konstant} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \big[f(x) + g(x)\big] &= f'(x) + g'(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), && \text{produktregel} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) &= f'(g(x))g'(x), && \text{kjerneregel} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{f(x)} &= -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, && \text{brøkregel}
\end{aligned}$$

6. Integrasjon

Ubestemte integral: Vi sier at F er en **antiderivert** til f hvis $F'(x) = f(x)$ og vi skriver

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hvis F er en antiderivert til f, så er funksjonen G gitt ved $G(x) = F(x) + C$ også en antiderivert til f for alle konstanter C.

Antideriverte til noen vanlige funksjoner:

$$\begin{aligned}
\int x^r\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, && \text{for alle reelle tall } r \neq -1 \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln|x| + C \\
\int e^x\,\mathrm{d}x &= e^x + C \\
\int \sin x\,\mathrm{d}x &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,\mathrm{d}x &= \sin x + C
\end{aligned}$$

7. Trigonometriske funksjoner

7.1. Identiteter.

7.1. Identiteter. Det er en mengde identiteter knyttet til de trigonometriske funksjonene. Man skal ikke forsøke å huske alle disse, men heller være klar over at de finnes. Her er noen av dem, der de viktigste kommer først og bør kunnes utenat.

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta = \cos\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta = -\sin\theta$
- $\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$
- $\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \cos\theta\cos\phi$
- $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$
- $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

Vi har også at

$$|\cos\theta| \leq 1, \qquad |\sin\theta| \leq 1$$

for alle reelle tall θ.

Funksjonen tangens er definert som

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

for alle θ der $\cos\theta$ ikke er 0.

Hvis ikke annet er oppgitt, måles vinkler alltid i **radianer**. En vinkel kan defineres ved å avsette to punkter på enhetssirkelen og dra linjene fra punktene til sentrum i sirkelen. Vinkelen mellom de to linjene, målt i radianer, er da lengden på sirkelsegmentet mellom de to punktene.

7.2. **Eksaktverdier.** For vilkårlige vinkler θ trenger vi, som regel, datamaskiner for å regne ut tilnærminger for $\sin\theta$ og $\cos\theta$. Det er derimot noen verdier av θ som gir **eksakte** verdier for de trigonometriske funksjonene. Her er noen av dem.

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0 = \cos\pi/2 \\ \sin\pi/2 &= 1 = \cos 0 \\ \sin 3\pi/2 &= -1 = \cos\pi \\ \sin\pi/4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\pi/4 \\ \sin\pi/6 &= \frac{1}{2} = \cos\pi/3 \\ \sin\pi/3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\pi/6 \end{aligned}$$

7.3. **Symmetri.** Cosinus og sinus er **periodiske** funksjoner med periode 2π. Dvs. at for alle $k\in\mathbb{Z}$ og $\theta\in\mathbb{R}$ er

$$\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta, \qquad \sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta.$$

Cosinus er en jevn funksjon, mens sinus er en odde funksjon:

$$\cos(-\theta)=\cos\theta, \qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta.$$

8. Å fullføre kvadratet

abc-formelen for løsningene av en andregradsligning bør huskes. Altså, for $a\neq 0$ er

$$ax^2+bx+c=0 \qquad\iff\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Men det er også nyttig å kunne utlede denne formelen, særlig i forbindelse med integrasjon av rasjonale funksjoner:

$$
\begin{aligned}
0 &= ax^2 + bx + c \\
&\Longleftrightarrow \\
0 &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \\
&\Longleftrightarrow \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\Longleftrightarrow \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\
&= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&= \pm\frac{1}{2|a|}\sqrt{b^2 - 4ac} \\
&= \pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \\
&\Longleftrightarrow \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}.
\end{aligned}
$$

Det er likhet nummer tre som er kjernen i dette beviset for abc-formelen. Det er denne kreative ideen som kalles **å fullføre kvadratet**. Notasjonen $A = \pm B$ er en forkortelse av påstanden

$$A = B \quad \text{eller} \quad A = -B.$$