Løsning: Oppgave 1 a)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + y - 2 = (y+2)(y-1) =: g(y),$$

så likevektsløsningene er de to konstante funksjonene

$$\hat{y}_1 = -2, \quad \text{og} \quad \hat{y}_2 = 1.$$

Nå er $g'(y) = 2y + 1$ så løsningen $\hat{y}_1$ er **stabil** fordi

$$g'(\hat{y}_1) = g'(-2) = -3 < 0$$

og $\hat{y}_2$ er **ustabil** fordi

$$g'(\hat{y}_2) = g'(1) = 3 > 0.$$

Stabiliteten til likevektsløsningene kan også avgjøres ved å drøfte grafen til g.

Løsning: Oppgave 1 b)
Ligningen er separabel:

$$\frac{dy}{y^2 + y - 2} = \mathrm{d}x.$$

Delbrøkoppspaltning:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2+y-2} = \frac{1}{(y+2)(y-1)} &= \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y-1} \\
&= \frac{A(y-1) + B(y+2)}{(y+2)(y-1)} \\
&\Longleftrightarrow \\
1 &= A(y-1) + B(y+2) \\
&= (A+B)y + 2B - A \\
&\Longleftrightarrow \\
A + B = 0 \quad &\text{og} \quad 1 = 2B - A \\
&\Longleftrightarrow \\
A = -\frac{1}{3} \quad &\text{og} \quad B = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Altså er

$$3\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+2}\right)\mathrm{d}y$$

som kan integreres til

$$\begin{aligned}
3x + C &= \ln|y-1| - \ln|y+2| \\
&= \ln(1-y) - \ln(y+2), \quad \text{fordi } -2 < y < 1 \\
&= \ln\frac{1-y}{y+2} \\
&\iff \\
Ke^{3x} = e^{3x+C} &= \frac{1-y}{y+2}.
\end{aligned}$$

Initialbetingelsen gir $K = \frac{1-(-1)}{-1+2} = 2$. Vi løser nå for y og finner at

$$y(x) = \frac{1-4e^{3x}}{1+2e^{3x}}.$$

Løsning: Oppgave 1 c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1-4e^{3x}}{1+2e^{3x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}-4}{e^{-3x}+2} \\
&= \frac{-4}{2} = -2. \\
\lim_{x\to-\infty} y(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1-4e^{3x}}{1+2e^{3x}} \\
&= \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Alle grafene i figur 1 oppfyller initialbetingelsen $y(0) = -1$, men bare **graf (d)** ser ut til å tilfredsstille grenseverdiene beregnet ovenfor.

Denne oppgaven kan også løses uten å finne en eksplisitt formel for $y(x)$: Likevektsløsningene og deres stabilitet, som vi fant i oppgave 1a) forteller at alle løsninger til differensialligningen som har en verdi i intervallet (-2,1) – i dette tilfellet $y(0) = -1 \in (-2, 1)$ – vil bevege seg **bort** fra $y = 1$ og **mot** $y = -2$. Denne innsikten gir oss både grenseverdiene og at figur 1(d) er eneste kandidat til å være grafen til y.

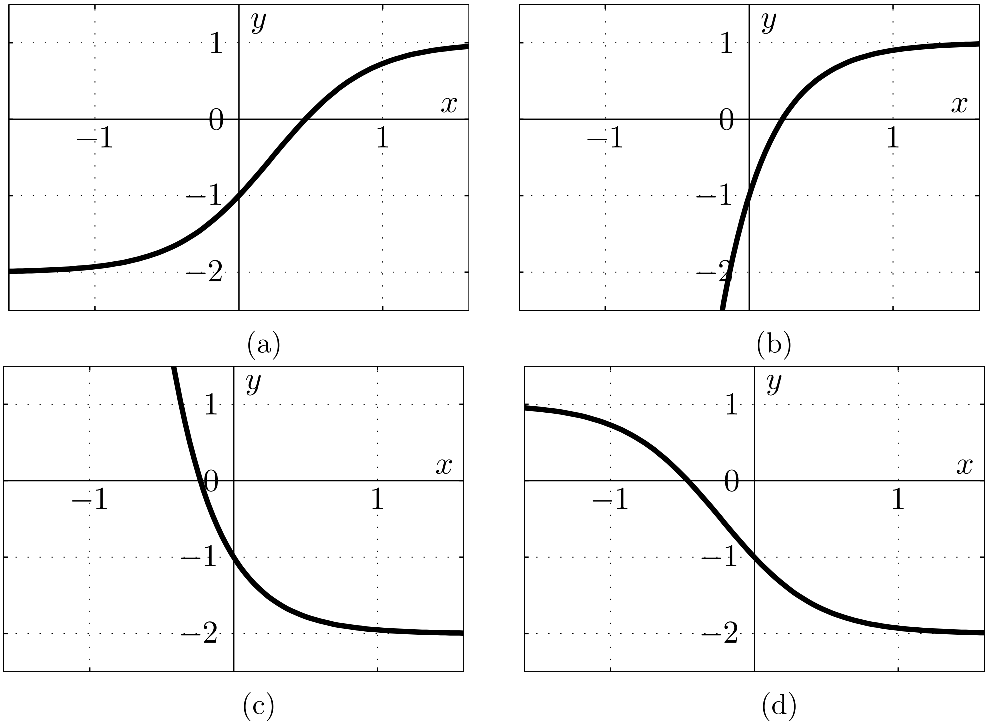
Løsning: Oppgave 2

La x være antall kronestykker og la y være antall fem-kroner i stabelen. Stabelen veier

$$4.35x + 7.85y = 601 \tag{1}$$

gram, og er

$$1.7x + 2y = 197.5 \tag{2}$$



Figur 1: Finn riktig graf i oppgave 1c)

mm høy. Dette er et lineært ligningssett som kan løses med f.eks. radreduksjon (Gausseliminasjon): 1.7 ganger (1) minus 4.35 ganger (2) gir

$$\cancel{1.7 \cdot 4.35x} + 1.7 \cdot 7.85y - \cancel{4.35 \cdot 1.7x} - 4.35 \cdot 2y = 1.7 \cdot 601 - 4.35 \cdot 197.5$$
$$\iff$$
$$(1.7 \cdot 7.85 - 4.35 \cdot 2)y = 1.7 \cdot 601 - 4.35 \cdot 197.5.$$

Det er altså

$$y = \frac{1.7 \cdot 601 - 4.35 \cdot 197.5}{1.7 \cdot 7.85 - 4.35 \cdot 2} = 35$$

fem-kroner. Ligning (2) gir da

$$x = \frac{197.5 - 2y}{1.7} = \frac{197.5 - 2 \cdot 35}{1.7} = 75$$

kronestykker og stabelen er verdt

$$1 \cdot x + 5y = 75 + 175 = 250$$

kroner.

Løsning: Oppgave 3 a)

Egenverdiene til A er løsningene av ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Dvs

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 2.$$

Egenvektoren $\mathbf{u}_1$ er en løsning til ligningen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda_1 I)\mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

så alle vektorer med komponenter som tilfredsstiller $x - y = 0$ er en egenvektor til A. La derfor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi finner $\mathbf{u}_2$ på samme måte:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda_2 I)\mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \\ x &= 4y \end{aligned}$$

Med f.eks. $y = 1$ har vi at

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor til A tilhørende $\lambda_2 = 2$.

Løsning: Oppgave 3 b)
Vi har nå at

$$U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definisjonen av matriseprodukt gir

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

og det er åpenbart at eksponenten til elementene på diagonalen vil øke med én for hver ny multiplikasjon med Λ. De andre elementene vil alltid være null. Altså er

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Formelen for inversen til en 2×2-matrise gir at

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{aligned} U\Lambda U^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Løsning: Oppgave 3 c)
La $n \in \mathbb{N}$ og la B og C være kvadratiske matriser der B er inverterbar. Da er

$$\begin{aligned} \left(BCB^{-1}\right)^n &= BCB^{-1}BCB^{-1}B \cdots CB^{-1} \\ &= BCICI \cdots CB^{-1} \\ &= BCC \cdots CB^{-1} \\ &= BC^nB^{-1}. \end{aligned}$$

Fra oppgave 3b) ser vi at $A = U\Lambda U^{-1}$. Dette, og det over, medfører at vi kan beregne

A^6 som

$$
\begin{aligned}
A^6 &= \left(U\Lambda U^{-1}\right)^6 \\
&= U\Lambda^6 U^{-1} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^6 & 0\\ 0 & \lambda_2^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\lambda_1^6 & 4\lambda_2^6\\ \lambda_1^6 & \lambda_2^6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\lambda_1^6 - 4\lambda_2^6 & -4\lambda_1^6 + 4\lambda_2^6\\ \lambda_1^6 - \lambda_2^6 & -4\lambda_1^6 + \lambda_2^6\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 - 4\cdot 2^6 & -4\cdot 1 + 4\cdot 2^6\\ 1^6 - 2^6 & -4\cdot 1 + 2^6\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-255 & 252\\ -63 & 60\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}85 & -84\\ 21 & -20\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

At $A = U\Lambda U^{-1}$ er ingen tilfeldighet:

$$
\begin{aligned}
AU &= A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\
&= (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2) \\
&= (\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2) \\
&= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \\
&= U\Lambda.
\end{aligned}
$$

Løsning: Oppgave 4 a)
Du løper x km langs elvebredden, og ved Pythagoras er lengden på svømmeturen

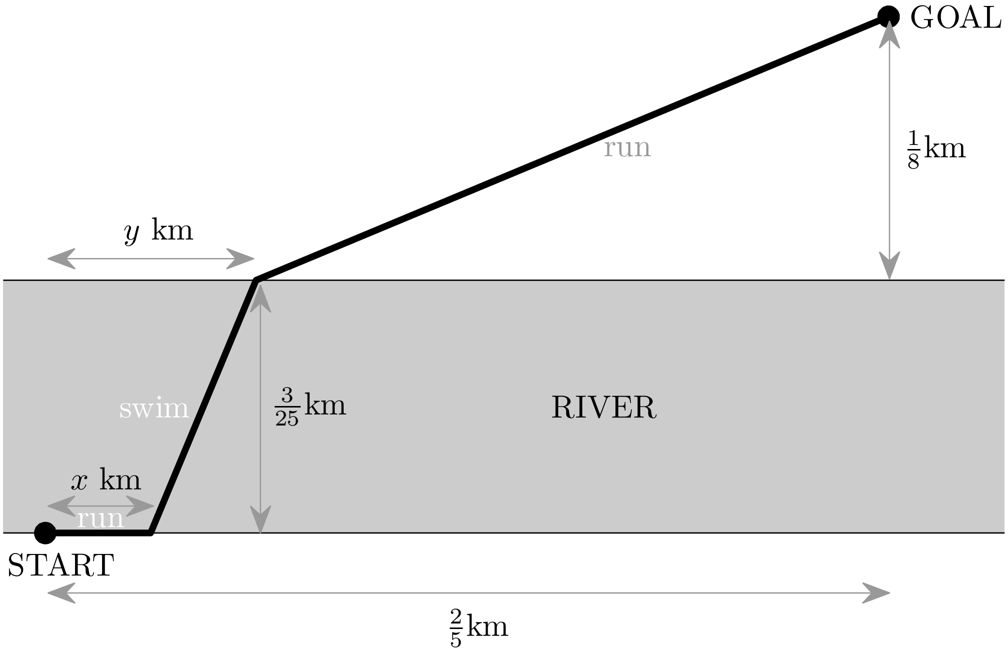
$$
\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}
$$

km lang og avstanden fra der du kommer i land til mål er

$$
\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}
$$

km. Ettersom tid er avstand/hastighet, blir da tiden T det tar å komme seg fra start til mål

$$
T(x,y) = \frac{x}{13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}}{5} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}}{12}
$$



Figur 2: Løp, svøm og løp i oppgave 4

timer. Gradienten er gitt ved $\nabla T(x,y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)$ der

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{13} + \frac{1}{5}\frac{2(y-x)(-1)}{2\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} \\ &= \frac{1}{13} - \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}}\end{aligned}$$

og

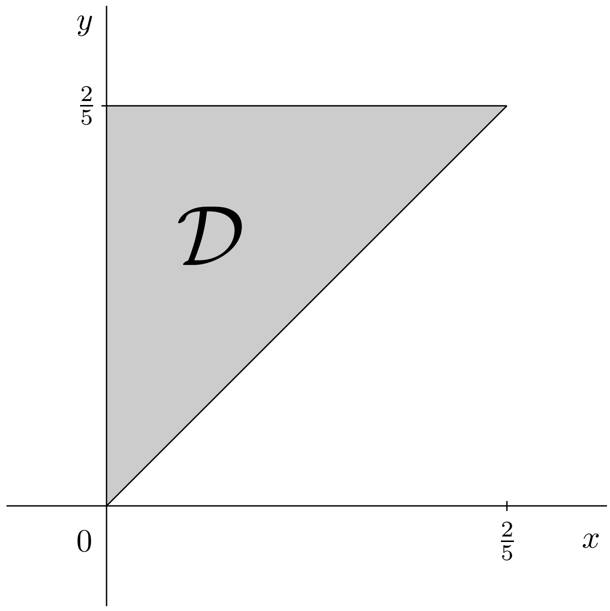
$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{5}\frac{2(y-x)}{2\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} + \frac{1}{12}\frac{2\left(\frac{2}{5}-y\right)(-1)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-y\right)^2}} \\ &= \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} - \frac{\frac{2}{5}-y}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-y\right)^2}}.\end{aligned}$$

Løsning: Oppgave 4 b)

Mengden $\mathcal{D}$ er trekanten vist i figur 3. Området er avgrenset av linjene $y = x, y = 2/5$ og $x = 0$.

Minimum til T på randlinjen $x = 0$, er oppgitt i oppgaveteksten. Det gjenstår å sjekke de andre randlinjene til domenet. Vi ser først på diagonalen $y = x$ i trekanten og vi lar

$$g_1(x) := T(x,x) = \frac{x}{13} + \frac{3}{25 \cdot 5} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-x\right)^2}}{12}$$



Figur 3: Mengden $\mathcal{D}$ i planet.

for $0 \leq x \leq 2/5$.

Kandidater for minimum på randen er endepunktet til diagonalen,

$$\hat{\mathbf{x}}_1 := \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

(Det andre endepunktet $(0,0)^T$ er ikke interessant ettersom det ligger på linjen

$x = 0$) og eventuelle kritiske punkter til g_1:

$$0 = g_1'(x) = \frac{1}{13} - \frac{\frac{2}{5} - x}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}}$$

$$\iff$$

$$\frac{1}{13} = \frac{\frac{2}{5} - x}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}}$$

$$\iff$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2} = \frac{13}{12}\left(\frac{2}{5} - x\right)$$

$$\iff$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 = \frac{13^2}{12^2}\left(\frac{2}{5} - x\right)^2, \quad \text{fordi } \frac{2}{5} - x \geq 0$$

$$\iff$$

$$\left(\frac{13^2}{12^2} - 1\right)\left(\frac{2}{5} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{1}{\frac{13^2}{12^2} - 1}\\ &= \frac{1}{8^2}\frac{12^2}{13^2 - 12^2}\\ &= \frac{9}{100}.\end{aligned}$$

Altså er $\frac{2}{5} - x = \frac{3}{10}$ som gir $x = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$. Dette gir det andre kandidatpunktet

$$\hat{\mathbf{x}}_2 := \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nå på linjen $y = 2/5$ og lar

$$g_2(x) := T(x, 2/5) = \frac{x}{13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}}{5} + \frac{1}{8 \cdot 12}$$

for $0 \leq x \leq 2/5$. Denne funksjonen har et kritisk punkt gitt ved

$$
\begin{aligned}
0 = g_2'(x) &= \frac{1}{13} - \frac{\frac{2}{5} - x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}} \\
&\Longleftrightarrow \\
\frac{1}{13} &= \frac{\frac{2}{5} - x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}} \\
&\Longleftrightarrow \\
\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2} &= \frac{13}{5}\left(\frac{2}{5} - x\right) \\
&\Longleftrightarrow \\
\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \frac{13^2}{5^2}\left(\frac{2}{5} - x\right)^2, \quad \text{fordi } \frac{2}{5} - x \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \\
\left(\frac{13^2}{5^2} - 1\right)\left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \left(\frac{3}{25}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \\
\left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \left(\frac{3}{25}\right)^2 \frac{1}{\frac{13^2}{5^2} - 1} \\
&= \frac{3^2}{25^2}\frac{5^2}{13^2 - 5^2} \\
&= \frac{1}{400}.
\end{aligned}
$$

Dvs. $\frac{2}{5} - x = \frac{1}{20}$, og $x = \frac{2}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$. Dette gir den tredje og siste kandidaten for minimum på randen:

$$\hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 7/20 \\ 2/5 \end{pmatrix}.$$

En sammenligning av kandidatene forteller at

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_1 &= \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, & T(\hat{\mathbf{x}}_1) &= \frac{2}{5 \cdot 13} + \frac{3}{5 \cdot 25} + \frac{1}{12 \cdot 8} \\
& & &\approx 0.06519 \\
\hat{\mathbf{x}}_2 &= \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}, & T(\hat{\mathbf{x}}_2) &= \frac{1}{10 \cdot 13} + \frac{3}{5 \cdot 25} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2}}{12} \\
& & &\approx 0.05878 \\
\hat{\mathbf{x}}_3 &= \begin{pmatrix} 7/20 \\ 2/5 \end{pmatrix}, & T(\hat{\mathbf{x}}_3) &= \frac{7}{20 \cdot 13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2}}{5} + \frac{1}{8 \cdot 12} \\
& & &\approx 0.06334
\end{aligned}
$$

Ingen av disse verdiene for T er mindre enn 0.05697, så **nei**, minimum for T på randen av $\mathcal{D}$ er 0.05697.

Løsning: Oppgave 4 c)
Funksjonen T er kontinuerlig på sitt lukkede og begrensede domene $\mathcal{D}$, så vi vet dermed at det finnes et absolutt minimum. Vi ser også at gradienten eksisterer for alle $(x, y)^T \in \mathcal{D}$ som betyr at vi vil finne dette minimumet enten i de kritiske punktene til T eller på randen til $\mathcal{D}$.

Vi finner de kritiske punktene til T. Dvs der $\nabla T = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial x} \\ &= \frac{1}{13} - \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}}. \end{aligned}$$

Denne ligningen løste vi i oppgave 4b) med $2/5 - x$ istedet for $y - x$. Altså er $y - x = 1/20$ km, eller 50 m.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} - \frac{\frac{2}{5} - y}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}} \end{aligned}$$

Det første leddet på høyre side må være lik $\frac{1}{13}$ for at $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, så ligningen som skal løses er

$$\frac{1}{13} = \frac{\frac{2}{5} - y}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}}.$$

Denne ligningen har vi også løst i oppgave 4 b), da med $\frac{2}{5} - x$ istedet for $\frac{2}{5} - y$. Derfor er $2/5 - y = 3/10$ km eller 300 m. Vi kan nå fastslå at $y = 2/5 - 3/10 = 1/10$ og at $x = 1/10 - 1/20 = 1/20$ og at dette er det eneste kritiske punktet og en kandidat til absolutt minimum. Altså

$$\nabla T(x, y) = \mathbf{0} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/10 \end{pmatrix} =: \hat{\mathbf{x}}_4 \in \mathcal{D}.$$

Verdien til T i $\hat{\mathbf{x}}_4$ er

$$\begin{aligned} T(\hat{\mathbf{x}}_4) &= \frac{1}{20 \cdot 13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2}}{5} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2}}{12} \\ &\approx 0.05693 \end{aligned}$$

som er mindre enn 0.05697, som var minste verdi på randen.

Absolutt minimum oppnås altså i $\hat{\mathbf{x}}_4 = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/10 \end{pmatrix}$. Dvs. Du skal løpe $1/20$ km $= 50$ m langs elvebredden og deretter svømme slik at du kommer i land $1/10$ km $= 100$ m opp elvebredden på motsatt side. Det er mulig å komme seg fra start mål på 0.05693 timer $=$ 3 minutter og 24.95 sekunder (14 hundredeler raskere enn hvis du begynner å svømme med en gang!).

Figuren i oppgaven viser den raskeste ruten.