Løsningsforslag til Eksamen i MA0002
Vår 2012

21.05.2012

Oppgave 1

a) Differensialligningen er separabel. Vi separerer variablene og integrerer[1]:

$$\frac{dy}{y^2} = x^2\,dx$$
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x^2\,dx$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + C,$$

som gir

$$y = -\frac{3}{x^3 + 3C}.$$

Initialbetingelsen gir

$$1 = -\frac{3}{3C},$$

så $C = -1$. Løsningen på initialverdiproblemet er dermed:

$$y = \frac{3}{3 - x^3}.$$

[1] Vi ser bort ifra løsningen $y = 0$ da den ikke tilfredstiller initialbetingelsen.

b) Differensialligningen er separabel. Vi får:

$$\int \frac{dy}{y-T} = \int k\,dt$$
$$\ln|y-T| = kt + C,$$

så løsningene er gitt ved

$$y(t) = Ce^{kt} + T.$$

Vi har fått vite at $T = 20$ og at $y(0) = 90$. Setter vi dette inn i løsningen får vi $90 = C+T$, så $C = 70$. I tillegg har vi fått vite at $y(2) = 80$, så

$$80 = 70e^{2k} + 20,$$

som gir $e^{2k} = 6/7$. Dermed er $k = \ln(6/7)/2 \approx -0.077$.

Kaffen er 65 grader når $y(t) = 65$. Det vil si, når

$$65 = 70e^{-0.077t} + 20,$$

eller $e^{-0.077t} = 45/70$. Løser vi for t får vi $t \approx 5.74$ minutter, eller omtrent 5 minutter og 44 sekunder.

Oppgave 2

a) Produktet er

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & -2+2 \\ 1+6 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Egenverdiene er gitt som løsningene λ til ligningen $\det(B - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3, \end{aligned}$$

som gir de to egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 3$.

<u>Egenvektorene til λ_1:</u> Disse er gitt som løsningene av $Bx = \lambda_1 x$, eller $(B - \lambda_1 I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

altså

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ er fri} \end{cases}$$

eller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 \mathbf{v_1}.$$

<u>Egenvektorene til λ_2</u>: Disse er gitt som løsningene av $Bx = \lambda_2 x$, eller $(B - \lambda_2 I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

altså

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ er fri} \end{cases}$$

eller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 \mathbf{v}_2.$$

c) Vektoren $B^5\mathbf{x}$ kan skrives som

$$\begin{aligned} B^5\mathbf{x} &= a_1\lambda_1^5\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^5\mathbf{v}_2 \\ &= a_1 1^5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 3^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= a_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 243\, a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

der a_1 og a_2 er slik at $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$. Vi finner a_1 og a_2 ved å løse systemet:

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 &= 3 \\ a_1 + a_2 &= -1, \end{aligned}$$

som gir at $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

Dermed er

$$B^5\mathbf{x} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 243 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 245 \\ 241 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

a) Determinanten er[2]

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(2-3) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

b) Siden determinanten til A er ulik 0 vet vi at inversen eksisterer. Vi kan finne den ved hjelp av den augmenterte matrisen $[A \mid I_3]$ og rekkereduksjon:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]
$$

Inversen til A er dermed:

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}
$$

c) Matrisen tilhørende ligningssystemet er A. På matriseform blir systemet

$$
A\mathbf{x} = \mathbf{b},
$$

der

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Vi kan løse denne ligningen ved å multiplisere med A^{-1} på begge sider.[3] Får

$$
\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+1 \\ 1+1-1 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},
$$

altså at $x = -1$, $y = 1$ og $z = 2$.

---

[2] Determinanten beregnes her langs første rad. Den kan også beregnes langs andre rader og søyler (så lenge man passer på å bruke korrekte fortegn).

[3] Alternativt kunne vi brukt rekkereduksjon.

Oppgave 4

a) Gradienten til f er vektoren

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{y^2-x} - xe^{y^2-x} \\ 2xye^{y^2-x} \end{bmatrix}.$$

b) Den retningsderiverte til f i punktet $(4,2)$ og i retning av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er

$$D_{\mathbf{u}} f(4,2) = \nabla f(4,2) \cdot \mathbf{u},$$

der $\cdot$ er skalarproduktet og $\mathbf{u}$ er en enhetsvektor i samme retning som $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Det vil si

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi får

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(4,2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{19}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Gradienten til f vil i ethvert punkt peke i den retningen f vokser raskest. I $(4,2)$ vokser derfor f raskest i retningen gitt ved vektoren

$$\nabla f(4,2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

c) Kritiske punkt til f er punkt (x,y) med $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} e^{y^2-x} - xe^{y^2-x} \\ 2xye^{y^2-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gir

$$\begin{cases} e^{y^2-x} - xe^{y^2-x} &= 0 \\ 2xye^{y^2-x} &= 0, \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} 1 - x &= 0 \\ 2xy &= 0. \end{cases}$$

(Merk: Den siste overgangen følger av at e^{y^2-x} aldri kan være lik 0.) Det eneste kritiske punktet til f er altså $(x,y) = (1,0)$.

For å klassifisere dette punktet kan vi bruke de andreordens partiellderiverte til f. Vi har

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -e^{y^2-x} - (e^{y^2-x} - xe^{y^2-x}) = -2e^{y^2-x} + xe^{y^2-x} \\ f_{yy}(x,y) &= 2xe^{y^2-x} + 4xy^2e^{y^2-x} \\ f_{xy}(x,y) &= 2ye^{y^2-x} - 2xye^{y^2-x}. \end{aligned}$$

Dermed blir $f_{xx}(1,0) = -e^{-1}$, $f_{yy}(1,0) = 2e^{-1}$ og $f_{xy}(1,0) = 0$.
Siden $D = f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0) - (f_{xy}(1,0))^2 = -2e^{-2} < 0$ er $(1,0)$ et *sadelpunkt til* f.

d) Området gitt ved $x^2+y^2 \leq 4$ er lukket og begrenset, så globale maksimum og minimum til f eksisterer. Vi vet at de må finnes enten i kritiske punkt internt i området, eller i punkter på randen. Det eneste kritiske punktet til f er $(1,0)$ (dette ligger inni området), som vi allerede har vist at er et sadelpunkt (og dermed hverken maksimum eller minimum).

På randen $x^2+y^2 = 4$ har vi at $y^2 = 4 - x^2$, der $-2 \leq x \leq 2$. Funksjonen f begrenset til denne randen kan dermed skrives som envariabelfunksjonen

$$f(x) = xe^{(4-x^2)-x} = xe^{-x^2-x+4}.$$

Kandidater til maksimum og minimum på området $-2 \leq x \leq 2$ er eventuelle kritiske punkt til funksjonen, samt endepunktene $x = -2$ og $x = 2$. Vi har

$$f'(x) = e^{-x^2-x+4} + x(-2x-1)e^{-x^2-x+4},$$

så $f'(x) = 0$ gir $2x^2 + x - 1 = 0$, eller $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$.
Til sammen får vi følgende kandidater for maksimum og minimum til $f(x,y)$:[4]

$$(-2,0), \quad (2,0), \quad (-1,-\sqrt{3}), \quad (-1,\sqrt{3}), \quad (1/2,-\sqrt{15/4}), \quad (1/2,\sqrt{15/4}).$$

Disse gir henholdsvis (de tilnærmede) funksjonsverdiene

$$-14.78, \quad 0.27, \quad -54.60, \quad -54.60, \quad 12.90, \quad 12.90.$$

Altså er:

globale minimum: $(-1,\sqrt{3})$ og $(-1,-\sqrt{3})$

globale maksimum: $(1/2,-\sqrt{15/4})$ og $(1/2,\sqrt{15/4})$.

[4] y-koordinatene til punktene på randen regnes ut ved hjelp av $y^2 = 4 - x^2$, som gir $y = \pm\sqrt{4-x^2}$.

Oppgave 5

a) Systemet kan skrives som

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

der

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Den generelle løsningen til systemet er

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v_2}e^{\lambda_2 t},$$

der C_1, C_2 er vilkårlige konstanter, og $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ er egenvektorer til A med tilhørende egenverdier λ_1, λ_2. For å løse systemet trenger vi altså egenverdiene og egenvektorene til A.

Vi har

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-4-\lambda) + 6 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2, \end{aligned}$$

som gir egenverdiene $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = -1$.

<u>Egenvektor tilhørende λ_1:</u>

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+2 & -2 & 0 \\ 3 & -4+2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

altså

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2/3 \\ x_2 \text{ er fri} \end{cases}$$

eller

$$x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = x_2\mathbf{v_1},$$

der x_2 kan velges fritt (bortsett fra lik 0).

<u>Egenvektor tilhørende λ_1:</u>

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+1 & -2 & 0 \\ 3 & -4+1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

altså

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ er fri} \end{cases}$$

eller

$$x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 \mathbf{v_1}.$$

Den generelle løsningen er dermed

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Initialbetingelsen gir at

$$\begin{aligned} 2C_1 + C_2 &= 3 \\ 3C_1 + C_2 &= 4, \end{aligned}$$

så løsningen som tilfredstiller initialbetingelsen har $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Løsningen av initialverdiproblemet er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

b) Siden egenverdiene til A begge er reelle, distinkte og negative er ekvilibriumspunktet $(0,0)$ globalt stabilt. Når $t \to \infty$ vil $\mathbf{x(t)} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \to \mathbf{0}$. Med andre ord: løsningene beveger seg mot origo.