Løsningsforslag til konteeksamen i MA0002
Høst 2012

09.08.2012

Oppgave 1

a) Vi foretar substitusjonen $u = x^2$. Siden $du/dx = 2x$ gir dette oss integralet

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \cos(u)\,du &= \frac{1}{2}\sin(u) + C \\ &= \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.\end{aligned}$$

b) Separerer variabler[1]

$$\frac{1}{y(y-1)}\,dy = 2\,dx.$$

Venstresiden kan forenkles ved hjelp av delbrøkoppspalting. Får

$$\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)dy = 2\,dx$$

Integrasjon gir så

$$\begin{aligned}\ln|y-1| - \ln|y| &= 2x + C \\ \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= 2x + C \\ \frac{y-1}{y} &= Ce^{2x},\end{aligned}$$

[1] Ser her bort fra løsningene $y = 0$ og $y = 1$, slik at nevneren ikke blir lik 0. Initialbetingelsen gjør at vi ikke trenger å bry oss om disse.

som kan skrives som

$$y = \frac{1}{1 - Ce^{2x}}.$$

Initialbetingelsen gir at

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{1 - C},$$

så $C = -1$. Løsningen på initialverdiproblemet er dermed

$$y = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

c) Ekvilibrium har vi der $2y(y-1) = 0$, altså når $y = 0$ og $y = 1$.

Stabiliteten kan bestemmes ved å finne egenverdiene til differensialligningen. Det vil si, de deriverte til $2y(y-1)$ i de to ekvilibriumspunktene. Vi har

$$(2y(y-1))' = 4y - 2.$$

Så egenverdiene tilhørende $y = 0$ og $y = 1$ er henholdsvis -2 og 2. Dermed er $y = 0$ et lokalt stabilt ekvilibrium, mens $y = 1$ er ustabilt.

Oppgave 2

a) Egenverdiene λ er gitt ved ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-4-\lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2. \end{aligned}$$

Får $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Ved å løse systemene $(A - \lambda_1 I) = 0$ og $(A - \lambda_2 I) = 0$ finner vi at egenvektorene er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) Litt regning gir at

$$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix}.$$

Ved hjelp av egenverdiene og egenvektorene til A kan produktet skrives som

$$\begin{aligned} A^{20}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} &= 8(-2)^{20}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} - 2(1)^{20}\begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-8388598\\8388604\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Determinanten er

$$\begin{vmatrix}a & 1\\8 & 2\end{vmatrix} = 2a - 8.$$

b) For en gitt a har ligningssystemet enten (i) nøyaktig en løsning, (ii) uendelig mange løsninger, eller (iii) ingen løsning.

Videre vet vi at tilfellet (i) har vi kun dersom determinanten til systemet er ulik 0.

Ser at $det(A) = 2a - 8$ er lik 0 kun hvis $a = 4$. Systemet blir i dette tilfellet

$$\begin{aligned} 4x + y &= 0 \\ 8x + 2y &= 0, \end{aligned}$$

som har en fri variabel og dermed uendelig mange løsninger.

c) Vi kan finne inversen[2] ved å rekkeredusere matrisen $[B \,|\, I]$. Får

$$\begin{bmatrix}-1/3 & 1/6\\4/3 & -1/6\end{bmatrix}$$

Oppgave 4

a) Gradienten er vektoren

$$\nabla f = \begin{bmatrix}f_x(x,y)\\f_y(x,y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2xy - y^2\\x^2 - 2xy\end{bmatrix}$$

[2]Inversen eksisterer siden determinanten er ulik 0

b) Tangentplanet til f i punktet $(2,-2)$ er gitt ved

$$z - f(2,-2) = f_x(2,-2)(x-2) + f_y(2,-2)(y+2)$$

som gir

$$z + 16 = -12(x-2) + 12(y+2),$$

eller

$$z = -12x + 12y + 32.$$

c) Den retningsderiverte i punktet $(2,3)$ i retning av vektoren $[1,-1]'$ er

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(2,3) &= \nabla f(2,3) \cdot \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= 11/\sqrt{2}, \end{aligned}$$

der $\mathbf{u}$ er enhetsvektoren i samme retning som $[1,-1]'$.

Oppgave 5

a) Den generelle løsningen til systemet er

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

der $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer, og λ_1, λ_2 er egenverdier, til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egenverdiene er

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = -1,$$

og de tilhørende egenvektorene er henholdsvis

$$\mathbf{v}_1 = [2,3]' \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = [-1,1]'$$

Løsningen er altså

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

b) Det ikke-homogene systemet har løsningen

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \hat{\mathbf{x}},$$

der $\hat{\mathbf{x}}$ løser ligningen

$$A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Vi får altså generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Initialbetingelsene $x(0) = 3$ og $y(0) = 9$ gir at $C_1 = 2$ og $C_2 = 2$, så løsningen på initialverdiproblemet er

$$\mathbf{x}(t) = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$