Løsningsforslag til eksamen i MA0002 Brukerkurs B i matematikk

Fredag 21. mai 2010
Tid: 09.00 - 13.00

Oppgave 1

a) Dette er en separabel differensialligning;

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y\cos x \\ \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \cos x \mathrm{d}x \\ \ln|y| &= \sin x + C_1 \\ |y| &= e^{\sin x + C_1} \\ y &= \pm e^{C_1} e^{\sin x} \\ y &= C_2 e^{\sin x} \end{aligned}$$

Setter inn for initialbetingelsen $y(0) = 2$:

$$2 = y(0) = C_2 e^{\sin 0} = C_2 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Løsningen av initialverdiproblemet er

$$y(x) = 2e^{\sin x}.$$

b) Ligningen for planet gjennom punktet $(a, b, c) = (2, 3, 1)$ som står normalt på vektoren $\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) &= 0 \\ 3(x-2) - 1(y-3) + 4(z-1) &= 0 \\ 3x - y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1.5 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$

b) Ved $t = 0$ er saueflokken gitt ved $N(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$. Flokken ved $t = 1$ er da:

$$N(1) = LN(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1.5 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \\ 36 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Så, ved $t = 1$ har bonden fått 80 lam og hele flokken består av totalt 130 individ.

Oppgave 3

$$f(x, y) = 10 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 - x^2,$$

a) Kritiske punktene til $f(x, y)$: Når gradienten til f er lik nullvektor.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fra første ligningen, $-2x = 0$, får vi at $x = 0$. Fra den andre ligningen

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}y + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}y^3 = 0 \\ &\frac{1}{8}y(12 + y - y^2) = 0 \\ &12 + y - y^2 = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0 \\ &-(y - 4)(y + 3) = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0 \\ &y = -3 \quad \text{eller} \quad y = 0 \quad \text{eller} \quad y = 4 \end{aligned}$$

Kritiske punkt for $f(x, y)$ er $(0, -3)$, $(0, 0)$ og $(0, 4)$.

Klassifisering av punkta ved hjelp av andrederiverte-testen:

$$f_{xx} = -2$$
$$f_{yy} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2$$
$$f_{xy} = 0$$

(x, y)	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	type punkt
$(0, -3)$	-2	$-21/8$	0	$21/4$	maksimumspunkt
$(0, 0)$	-2	$3/2$	0	-3	sadelpunkt
$(0, 4)$	-2	$-7/2$	0	7	maksimumspunkt

b) Den retningsderiverte til f i et punkt gir stigningen i en gitt retning. Den retningsderiverte er størst i retningen av gradienten til f i punktet.

$$\nabla f(\frac{1}{4}, 1) = \begin{bmatrix} f_x(\frac{1}{4}, 1) \\ f_y(\frac{1}{4}, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Du opplever størst stigning i terrenget om du går i retningen av vektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

c) Langs stien $y = 4x$, eller $x = y/4$, er $f(x, y)$ gitt ved

$$f(\frac{y}{4}, y) = 10 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 - \frac{y^2}{16} = 10 + \frac{11}{16}y^2 + \frac{1}{24}y^3 - \frac{1}{32}y^4 = g(y)$$

Vi deriverer $g(y)$ og setter lik null for å finne maksimum av f langs stien.

$$g'(y) = \frac{11}{8}y + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}y^3 = 0$$
$$-\frac{1}{8}y(-11 - y + y^2) = 0$$
$$y^2 - y - 11 = 0 \quad \text{eller} \quad y = 0$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{45}}{2} \quad \text{eller} \quad y = 0$$

I oppgaven står det at man beveger seg bort fra punktet $(\frac{1}{4}, 1)$ i retning av økende x og y. så vi er bare interesserte i $y > 1$. Da har vi bare $y = \frac{1+\sqrt{45}}{2} = \frac{1+3\sqrt{5}}{2}$ som kandidat. Vi sjekker at dette er et maksimumspunkt for $g(y)$:

$$g''(y) = \frac{11}{8} + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2$$
$$g''(\frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}) < 0 \quad \Rightarrow \text{maksimumspunkt}$$

Siden $x = y/4$ har vi nå funnet at det høyeste punktet langs stien $y = 4x$ i positiv retning bort fra punktet $(\frac{1}{4}, 1)$ er punktet $(\frac{1+3\sqrt{5}}{8}, \frac{1+3\sqrt{5}}{2}) \approx (0.9635, 3.8541)$

Man kan også løse oppgaven ved å bruke Lagrange multiplikatormetode med bibetingelsen $g(x, y) = y - 4x = 0$.

Oppgave 4 La $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a)

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

Egenverdier for A er $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 1$.

Egenvektor for $\lambda_1 = -4$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det vil si at $2u_1 + 2u_2 = 0$, eller $u_2 = -u_1$. Vi velger $u_1 = 1$ og får egenvektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det vil si at $-3v_1 + 2v_2 = 0$, eller $2v_2 = 3v_1$. Vi velger $v_1 = 2$ og får egenvektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b) Fra a) har vi at $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Siden A har en negativ og en postitiv egenverdi, er likevektspunktet ustabilt.

Den generelle løsningen for systemet blir

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

c) Fra notatet om ikke-homogene ligninger vet vi at den generelle løsningen for det ikke-homogene systemet ER

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{x}}$$

der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til A med tilhørende egenvektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og $\hat{\mathbf{x}}$ er likevektspunktet til det ikke-homogene systemet.

Vi finner derfor først likevektspunktet for det ikke-homogene systemet, det vil si, $\hat{\mathbf{x}}$ slik at $A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = 0$, eller $A\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{b}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Det vil si at $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

Vi får

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$