Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Løsningsforslag til eksamen i MA0002 Brukerkurs B i matematikk

Torsdag 9. desember 2010

Hjelpemidler:
Kode A: Alle trykte og skrevne, samt kalkulator.

Alle deloppgaver teller like mye

Alle svar skal begrunnes!

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} \text{venstre side:} \quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^t - 1 \\ \text{høyre side:} \quad & y + t = e^t - t - 1 + t = e^t - 1 \end{aligned}$$

Høyre og venstre side er lik, altså er $y = e^t - t - 1$ er en løsning av differensialligningen.

b)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{1+y} \\ \int \frac{1+y}{y}\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\ \int (\frac{1}{y} + 1)\mathrm{d}y &= \int 1\mathrm{d}x \\ \ln|y| + y &= x + C \end{aligned}$$

Siden $y > 0$, blir den generelle løsningen av Michaelis-Menten-ligningen, gitt på implisitt form,

$$\ln y + y = x + C$$

.

Oppgave 2 Vi skal se på matrisen $L = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0.75 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Finner egenverdiene:

$$0 = |L - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 0.75 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 5 \cdot \frac{3}{4} = \lambda^2 - \lambda - \frac{15}{4}$$

som gir $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Tilhørende egenvektorer:

$$(L - \lambda_1 I)\mathbf{u_1} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5/2 & 5 \\ 3/4 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{5}{2}x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow -x_1 = 2x_2$$

$$(L - \lambda_1 I)\mathbf{u_2} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3/2 & 5 \\ 3/4 & -5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{3}{2}x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 10x_2$$

som (for eksempel) gir $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b)

$$\det L = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3/4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{15}{4} \neq 0$$

Siden $\det L \neq 0$, så er L en inverterbar matrise. Vi finner

$$L^{-1} = \frac{1}{\det L} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{4}{15} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Matrisen L er en Leslie-matrise for en bestand som består av to alderskategorier; ungdyr og voksne dyr. Ved $t = 1$ består bestanden av 80 ungdyr og 60 voksne.

c) Første rad angir fødselraten pr dyr i hver kategori: Hvert ungdyr får i snitt ett avkom, mens hvert voksent dyr får i snitt 5 avkom. Andre rad angir overlevelsesraten for hver kategori: 75% av ungdyrene overlever en tidsperiode og blir voksne dyr, mens ingen voksne dyr overlever en tidsperiode. La $\mathbf{N_t}$ angi antall dyr i hver kategori ved tiden t, Da er

$$\mathbf{N_1} = L\mathbf{N_0} \Rightarrow L^{-1}\mathbf{N_1} = L^{-1}L\mathbf{N_0} \Rightarrow \mathbf{N_0} = L^{-1}\mathbf{N_1}$$

Vi har funnet L^{-1} i b) og har fra oppgaveteksten at $\mathbf{N_1} = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix}$, setter dette inn og finner at $\mathbf{N_0} = \begin{bmatrix} 80 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) Dersom vi kan finne a_1 og a_2 slik at $N_0 = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2}$, kan vi finne bestanden ved $t = 10$ ved å rekne ut $N_{10} = L^{10}N_0 = a_1\lambda_1^{10}\mathbf{u_1} + a_2\lambda_2^{10}\mathbf{u_2}$ (dersom du ikke fant N_0 i forrige oppgave, kan du selvsagt bruke $N_{10} = L^9 N_1$ her). Vi får

$$\begin{aligned} 80 &= 2a_1 + 10a_2 \\ 0 &= -a_1 + 3a_2 \end{aligned}$$

som gir $a_1 = 15$ og $a_2 = 5$. Det gir

$$N_{10} = L^{10}N_0 = 15\left(-\frac{3}{2}\right)^{10}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 5\left(\frac{5}{2}\right)^{10}\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 478567 \\ 142186 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3 Finn globale minimums- og maksimumspunkt for funksjonen

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 2x$$

på det triangulære området avgrenset av punktene $(0, -1)$, $(0, 1)$ og $(1, 0)$.

Kandidatar for globale minimums- og maksimumspunkt for funksjonen er punkt der gradienten er lik null eller ikkje eksisterer, samt punkt på randen som består av tre linjer

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad -1 \le y \le 1 && (1) \\ y &= 1 - x, \quad 0 \le x \le 1 && (2) \\ y &= x - 1. \quad 0 \le x \le 1 && (3) \end{aligned}$$

Vi finner først alle disse punktene, og samenlikner så funksjonsverdiene for disse.

Finner først kritiske punkt:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 2 \\ 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$$

For hver linje randen består i, setter vi inn uttrykket vi har og får da en funksjon av en variabel. Kandidater for minimum eller maksimum langs randen blir da der den deriverte av disse funksjonene er lik null, samt i endepunktene; de tre hjørnene $(0, -1)$, $(0, 1)$ og $(1, 0)$.

Langs den første linjen er $x = 0$ og vi har

$$\begin{aligned} f(0,y) &= 3y^2 = g_1(y), \text{for } -1 \leq y \leq 1, \\ g_1'(y) &= 6y = 0 \Rightarrow y = 0, \end{aligned}$$

altså er punktet $(0,0)$ en kandidat. For den andre linjen har vi $y = 1 - x$ og finner

$$\begin{aligned} f(x, 1-x) &= 2x^2 + 3(1-x)^2 - 2x = 5x^2 - 8x + 3 = g_2(x), \text{for } 0 \leq x \leq 1, \\ g_2'(x) &= 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

som gir punktet $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$. Den tredje linjen er $y = x - 1$, og vi får

$$f(x, x-1) = 2x^2 + 3(x-1)^2 - 2x = 5x^2 - 8x + 3 = g_3(x), \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

Siden $g_3(x) = g_2(x)$, vet vi at $g_3'(x) = 0$ for $x = \frac{5}{4}$. Punktet blir da $(\frac{5}{4}, -\frac{1}{5})$.

(x,y)	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(\frac{4}{5},\frac{1}{5})$	$(\frac{4}{5},-\frac{1}{5})$
$f(x,y)$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3	3	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Fra tabellen finner vi at $f(x,y)$ har globale maksimumspunkt i $(0,-1)$ og $(0,1)$ og globalt minimumspunkt i $(\frac{1}{2}, 0)$.

Oppgave 4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 11 & 25 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Løsningen av systemet er altså $x = 3, y = 2, z = 1$.

Oppgave 5 Vi ser på følgende ikke-lineære system av differensialligninger

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= (x_1 - r)(x_2 - 1), \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= x_1 x_2 - 2r, \end{aligned}$$

der r er en konstant.

a) Likevektspunktene til systemet er punkt der både $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$ og $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$ er lik null:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow (x_1 - r)(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = r \text{ eller } x_2 = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow x_1 x_2 - 2r = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 2r$$

Dersom $x_1 = r$ følger det fra den andre ligningen at vi må ha $x_2 = 2$, og dersom $x_2 = 1$, så må $x_1 = 2r$. Likevektspunktene er derfor $(r, 2)$ og $(2r, 1)$.

b) For å si noe om stabiliteten til likevektspunktene må vi se på egenverdiene til Jakobimatrisen:

$$dF(x,y) = \begin{bmatrix} x_2 - 1 & x_1 - r \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad dF(r,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & r \end{bmatrix} \quad dF(2r,1) = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 1 & 2r \end{bmatrix}$$

For $(r, 2)$:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & r-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(r-\lambda) - 0 = \lambda^2 - (1+r)\lambda + r$$

som gir $\lambda_1 = r$ og $\lambda_2 = 1$. Siden $r < 0$ har vi en negativ og en positiv egenverdi, som betyr at vi har et ustabilt likevektspunkt.

For $(2r, 1)$:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & r \\ 1 & 2r-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda)(2r-\lambda) - r = \lambda^2 - 2r\lambda - r$$

som gir

$$\lambda_1 = r - \sqrt{r^2 - r} < 0$$
$$\lambda_2 = r + \sqrt{r^2 - r} > r + |r| = 0$$

siden $r < 0$ og $\sqrt{r^2 - r} > \sqrt{r^2} = |r|$. Vi har igjen en negative og en positiv egenverdi, så dette likevektspunktet er også ustabilt.