LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA0002, VÅR 09

Oppgave 1

a) (10%) Løs initialverdiproblemet gitt ved differensialligningen

$$\frac{dr}{dt} = 2rt + 3rt^2,$$

med initialbetingelsen $r(1) = 1$. Anta at $r > 0$.

Løsning: Ligningen er separabel, med $\frac{dr}{dt} = 2rt + 3rt^2 = r(2t + 3t^2)$. Dette gir at vi vil integrere det følgende (venstre side med hensyn til r og høyre side med hensyn til t):

$$\frac{1}{r}dr = 2t + 3t^2 dt,$$

som gir

$$\ln r = t^2 + t^3 + C_1,$$

hvor vi slipper absoluttverditegnet på r siden $r > 0$. Opphøyd i e får vi da

$$r = e^{t^2+t^3+C_1} = Ce^{t^2+t^3}.$$

Initalbetingelsen tilsier at

$$r(1) = Ce^{1^2+1^3} = Ce^2 = 1,$$

dvs at $C = \frac{1}{e^2}$, som gir løsning

$$r = \frac{1}{e^2}e^{t^2+t^3}.$$

b) (10%) Regn ut determinanten til matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi benytter regnereglene for determinanter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - 0 + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -0 + (0 - 0 + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix})$$
$$= (-1)(3-1) = -2.$$

c) (10%) Finn ligningen til planet i punktet (1,2,1) som er vinkelrett på vektoren $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Løsning: Dette planet har ligningen (fra formel)

$$4(x-1) - (y-2) + 7(z-1) = 4x - 4 - y + 2 + 7z - 7 = 4x - y + 7z - 9 = 0,$$

som eventuelt kan skrives om til $4x - y + 7z = 9$.

Oppgave 2 Max Rebo har en sparekonto hos Sparebanken Arkanis. Mengden credits i denne kontoen er $x(t)$, hvor t er tiden målt i år. Innskuddsrenta på denne kontoen er 6% per år, og Max setter inn 50 credits i måneden på kontoen. I tillegg skal banken ha 11 credits i året i gebyrer. Du kan gå ut fra at både renter, innskudd og gebyrer settes inn/taes ut kontinuerlig.

(10%) Finn differensialligningen for $x(t)$, det vil si ligningen for $\frac{dx}{dt}$.

Løsning: Vi velger år som tidsenhet. Innskuddsrenta, dvs renta, gjør at mengden credits øker med $0,06x(t)$ pr år, dvs 6 hundredeler av den mengden credits som står på kontoen. I tillegg forsvinner det 11 credits i året i gebyr, og mengden credits øker med $12 \cdot 50 = 600$ credits i året. Dette gir følgende ligning:

$$\frac{dx}{dt} = 0,06x - 11 + 600 = 0,06x + 589.$$

Oppgave 3 Vi ser på funksjonen $f(x,y) = x^3 - 4x + y^2$.

a) (5%) Finn gradienten til f, dvs ∇f.

Løsning: Det er bare å derivere, og gradienten blir $\begin{bmatrix} 3x^2-4 \\ 2y \end{bmatrix}$.

b) (5%) Finn den retningsderiverte av f i retning $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ fra punktet $(2{,}2)$.

Løsning: Vi vet at den retningsderiverte i retning $\underline{v}$, hvis $\underline{v}$ er en vektor av lengde 1, i punktet (a,b) er $\nabla f(a,b) \cdot \underline{v}$. Den oppgitte vektoren har lengde $\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Tilsammen gir dette at den retningsderiverte av f i den gitte retningen er

$$\nabla f(2,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 12-4 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-8+4}{\sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

c) (10%) Finn globale max og min for f på området begrenset av $x^2 + y^2 \leq 4$.

Løsning: Området vi ser på er en avgrenset av en sirkel om origo med radius 2. Kritiske punkt for f er der $\nabla f = \underline{0}$, som er punktene (runder til 3 desimaler) $(\pm 1.155, 0)$. Disse punktene gir verdiene:

$$f(1.155, 0) = -3.079 \tag{1}$$
$$f(-1.155, 0) = 3.079 \tag{2}$$

Dernest må vi undersøke randen til området. Dette er punktene slik at $x^2 + y^2 = 4$, dvs der $y^2 = 4 - x^2$. Dette er lett å substituere inn i den originale ligningen, som gir ny ligning

$$g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

Kritiske punkt til $g(x)$ er der

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Finner disse x via a, b, c-formelen, som gir $x = -0.869$ eller $x = 1.535$. Setter vi disse verdiene tilbake i $x^2 + y^2 = 4$ så får vi følgende verdier, med tilhørende verdier for f (ligningsverdiene blir like siden y ganges med seg selv):

$$f(1.535, 1.282) = f(1.535, -1.282) = -0.880 \tag{3}$$
$$f(-0.869, 1.801) = f(-0.869, -1.801) = 6.065 \tag{4}$$

Siden randen ikke har noen hjørner får vi ingen hjører å undersøke, og fra dette ser vi at punktet i (1) er globalt minimum og at punktene i (4) er globale maximum.

Oppgave 4 Vi ser på matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 \\ -2 & -3/2 \end{bmatrix}$.

a) (10%) Finn egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer.

Løsning: Vi starter med determinantligningen, som blir

$$(3-\lambda)(-3/2-\lambda) - 5/2(-2) = \lambda^2 - 3/2\lambda + 1/2 = 0.$$

Denne ligninga har løsninger for $x = 1$ og $x = 1/2$, som er egenverdiene. Trekker vi egenverdiene 1 og $1/2$ fra på diagonalen til A får vi matrisene

$$\begin{bmatrix} 2 & 5/2 \\ -2 & -5/2 \end{bmatrix} \text{ : mulig egenvektor er } \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ : mulig egenvektor er } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) (10%) Regn ut $A^{20}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Finn så

$$\lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} 410 \\ -408 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Vi har at $\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ -4 \end{smallmatrix}\right] - 6\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, som er en sum av egenvektorer. Dette betyr at

$$A^{20}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = A^{20}(\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = 1^{20}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} - 6\cdot(\frac{1}{2})^{20}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 6/2^{20} \\ -4 + 6/2^{20} \end{bmatrix}.$$

Videre så er $\left[\begin{smallmatrix} 410 \\ -408 \end{smallmatrix}\right] = 2\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ -4 \end{smallmatrix}\right] + 400\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$. Dette gir at

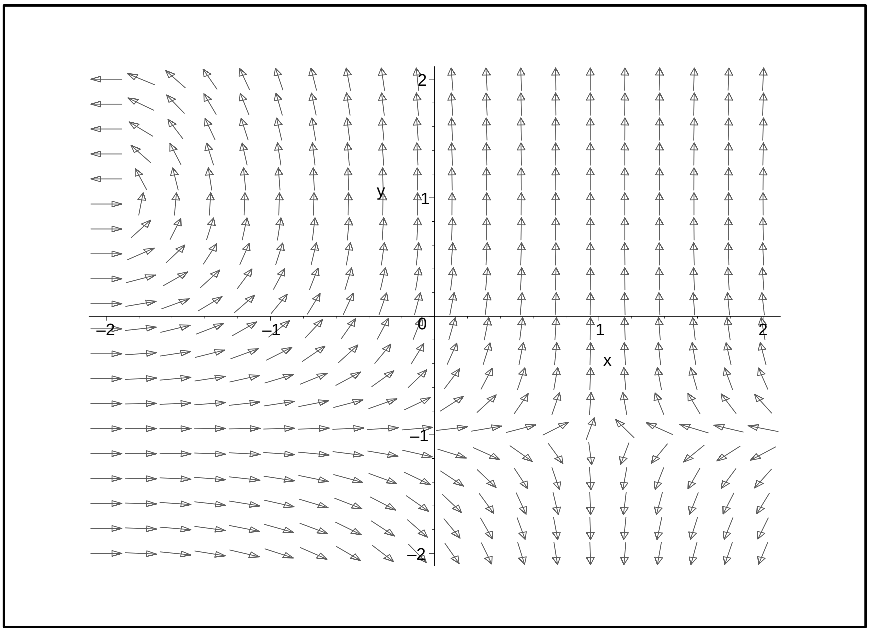
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} 410 \\ -408 \end{bmatrix} &= \lim_{n\to\infty} A^n(2\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} + 100\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) \\
&= \lim_{n\to\infty}(1^n\cdot 2\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} + (1/2)^n\cdot 100\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) \\
&= 2\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Oppgave 5 Vi ser på et system av differensialligninger:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 2(xy - y - x + 1) \\
\frac{dy}{dt} &= 5(xy + 2y) + 5x + 10,
\end{aligned}$$

a) (10%) Tegn et *retningsdiagram* for systemet av diffligninger, for alle punkter hvor x og y er et heltall, $-2 \leq x \leq 2$ og $-2 \leq y \leq 2$.

Løsning: (Det følgende retningsdiagrammet har for mange piler, riktig svar skal ha 25 piler, der hvor koordinatene er gitt av heltall, som spesifisert i oppgaveteksten.)



b) (10%) Finn likevektspunktene til systemet, og avgjør om de er stabile eller ustabile.

Løsning: Likevektspunktene er der de gitte diffligningene er lik 0. Hvis vi ser litt nøyere på koeffisientene til ligningene så finner vi:

$$\frac{dx}{dt} = 2(xy - y - x + 1) = 2(x-1)(y-1) \qquad (= d_1)$$
$$\frac{dy}{dt} = 5(xy + 2y) + 5x + 10 = 5(xy + 2y + x + 2) = 5(x+2)(y+1) \qquad (= d_2),$$

som betyr at systemet har to likevektspunkter $(1, -1)$ og $(-2, 1)$. Neste steg for å undersøke stabiliteten til disse likevektspunktene er å finne Jacobimatrisa til systemet, som er

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x} & \frac{\partial d_1}{\partial y} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x} & \frac{\partial d_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y-1) & 2(x-1) \\ 5(y+1) & 5(x+2) \end{bmatrix}$$

Setter vi inn for de to likevektspunktene får vi matrisene

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi finner nå stabiliteten ved å se på realdelene av egenverdiene til disse matrisene. Den første matrisen har egenverdier -4 og 15, den andre har egenverdier $\pm i2\sqrt{15}$. Dette betyr at ingen av dem har bare negative realdeler (den siste har realdel =0 for begge egenverdiene), og begge likevektspunktene er ustabile.