Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA0002, VÅR 07

Oppgave 1 Matriser:

a) Finn de to egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, og finn en egenvektor til hver av disse egenverdiene.

Svar: Vi setter opp determinantligningen, og får:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)(-3-\lambda) - (5)(-2) \\ &= -12 - \lambda + \lambda^2 + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Som betyr at A har egenverdier $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 2$. Finner mulige egenvektorer via $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \qquad & \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \underline{v}_2 = \underline{0} \qquad \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 : \qquad & \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \underline{v}_2 = \underline{0} \qquad \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Regn ut $A^{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Svar: Denne oppgave kan løses på flere måter. En kan selvfølgelig gange A med seg selv 20 ganger, eller en kan sette opp matrisen P av egenvektorene fra oppgave a), og finne $A = P^{-1}DP$. Det enkleste er å observere at $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ Dette gir det følgende:

$$\begin{aligned} A^{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} &= A^{20}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = A^{20}\underline{v}_1 + A^{20}\underline{v}_2 = (\lambda_1)^{20}\underline{v}_1 + (\lambda_2)^{20}\underline{v}_2 \\ &= (-1)^{20} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2^{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2^{20} \\ 5 + 2^{20} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 2 Differensial-ligninger :

a) Løs initialverdiproblemet $\frac{dy}{dx} = x^2$, når $y(3) = 5$.

Svar: Denne ligningen er separabel, $dy = x^2\ dx,$, og integrer vi venstre side mhp y og høyre side mhp x så får vi

$$y = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Initialbetingelsene gir nå at $y(3) = \frac{1}{3}3^3 + c = 9 + c = 5$, som gir at $c = -4$.

b) Finn generell løsning av $t\frac{dx}{dt} = 2x + t^3e^t$.

Svar: Med litt regning får vi at ligningen er lineær førsteordens:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t}x = t^2e^t.$$

Vi finner integrerende faktor, og starter med å integrere $-\frac{2}{t}$, som blir $-2\ln t$. Den integrerende faktoren blir da $e^{-2\ln t}$. Merk nå at

$$e^{-2\ln t} = e^{-\ln t}e^{-\ln t} = \frac{1}{e^{\ln t}}\frac{1}{e^{\ln t}} = \frac{1}{t^2}.$$

Ligningen blir nå

$$\frac{1}{t^2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{t^2}\frac{2}{t}x = \frac{1}{t^2}t^2e^t,$$

som forkorter til

$$\frac{1}{t^2}\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t^3}x = e^t.$$

Integrasjon mhp t gir nå

$$\frac{1}{t^2}x = e^t + c,$$

som tilslutt gir

$$x(t) = t^2(e^t + c).$$

Oppgave 3 I denne oppgaven studerer vi funksjonen

$$f(x, y) = 2(x + y^2) - x^3$$

a) Finn ∇f, dvs gradienten til f.

Svar: Dette blir kort og godt $\nabla f = \begin{bmatrix} 2 - 3x^2 \\ 4y \end{bmatrix}$.

b) Finn de kritiske punktene til f.

Svar:De kritiske punktene er der $\nabla f = \underline{0}$. Dette medfører at $y = 0$ og at $2 = 3x^2$, eller at $\frac{2}{3} = x^2$. De to kritiske punktene blir da $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ og $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.

c) Gitt den parametriserte linjen $l(t)$

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= -3t + 1, \end{aligned}$$

hvor $-3 \leq t \leq 3$. Dette betyr at linjen går fra og med punktet $(-6, 10)$ til og med punktet $(6, -8)$. Hva er det absolutte maksimum og absolutte mininimum f oppnår på punktene på denne linjen?

Svar: Vi starter med å benytte ligningene som parametriserer linja til å lage en funksjon $g(t)$ som er f begrenset til punktene på linja. Denne fåes ved å bytte x og y med ligningene i oppgaven, og blir

$$\begin{aligned} g(t) &= 2(2t + (-3t + 1)^2) - (2t)^3 \\ &= 4t + 18t^2 - 12t + 2 - 8t^3 = -8t^3 + 18t^2 - 8t + 2. \end{aligned}$$

Vi vil nå finne absolutte maks og min til denne funksjonen, når $-3 \leq t \leq 3$. Vi vil derfor undersøke de kritiske punktene. For å få til dette deriverer vi først $g(t)$, som gir

$$g'(t) = -24t^2 + 36t - 8.$$

Dette er en andregradsligning som (benytt formel) er null når $t = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{12}$, dvs $t \approx 1.229$ eller $t \approx 0.271$. Det er disse to t verdiene, samt $t = 3$ og $t = -3$ som må sammenlignes. Vi får:

$$\begin{aligned} t &= -3 &&: g(-3) = 404, \text{ abs max} \\ t &\approx 0.271 &&: g(0.271) \approx 0.995 \\ t &\approx 1.229 &&: g(1.229) \approx 4.5 \\ t &= 3 &&: g(3) = -76, \text{ abs min.} \end{aligned}$$

d) Hva er den retningsderiverte til f langs vektoren $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, i punktet hvor linjen fra **c)** skjærer linjen gitt av $x = y$?

Svar: Det første som må gjøres er å finne punktet, og dette kan f.eks gjøres ved å finne t slik at $2t = -3t + 1$, dvs der $5t = 1$. Dette er punktet $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, som er det eneste punktet som oppfyller kravet om at det ligger på linjen l og oppfyller $x = y$.

For å kunne finne den retningsderiverte må vi normalisere vektoren $\underline{u}$, og da må vi først finne lengden på $\underline{u}$, $|\underline{u}|$:

$$|\underline{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Den retningsderiverte er nå skalarproduktet av gradienten i punktet og den normaliserte $\underline{u}$:

$$\begin{aligned}\nabla f(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 - \frac{12}{25} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \big((2 - \frac{12}{25})2 + (\frac{8}{5})3\big) = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{196}{25}\end{aligned}$$

e) Finn en ligning som beskriver tangentplanet til f i punktet (1,1).

Svar: Punktet (1,1) angir plasseringen til planet i forhold til x og y verdiene. $f(1,1) = 2(1+1) - 1 = 3$, så planet skal gå gjennom $(1,1,3)$ i tre dimensjoner. Det eneste som nå behøves er gradienten i dette punktet

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 - 3 \cdot 1^2 \\ 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Setter vi dette inn i formelen for tangentplan, så får vi $z - 3 = -1 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-1)$ som forkortet blir

$$z = 4y - x,$$

og planet består av alle punkter som oppfyller dette kravet.