Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Per Roar Andenæs
Telefon: 9 17 03

MNFMA 001, Brukerkurs i matematikk

Bokmål
Onsdag 5. januar 2000
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok og utdelt kalkulator
Sensur: Onsdag 26. januar 2000

Oppgave 1

a) Bestem cosinus til vinkelen mellom vektorene $\vec{a} = [1, 2, 3]$ og $\vec{b} = [0, 1, \lambda]$, der λ er et reelt tall.

b) Finnes det noen verdi av λ slik at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står vinkelrett på hverandre? Kan $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være parallelle for noen verdi av λ? Begrunn svarene.

Oppgave 2 Bestem følgende grenseverdier:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^2}$$

(Ta med mellomregningene i besvarelsen.)

Oppgave 3

Funksjonen $f(x) = xe^{-x^2}$ er definert for alle reelle tall x.

a) Bestem eventuelle nullpunkt for f og avgjør hvor $f(x) > 0$ og hvor $f(x) < 0$.

b) Bestem eventuelle punkter der f har horisontal tangent og avgjør hvor funksjonen vokser og hvor den avtar. Bestem så (absolutt/globalt) maksimum og (absolutt/globalt) minimum for funksjonen.

c) Avgjør om funksjonen har noe vendepunkt og hvor den krummer oppover og hvor den krummer nedover.

d) Det opplyses at

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

Avgjør om grafen til $f(x) = xe^{-x^2}$ har noen asymptoter.

e) Skisser grafen til funksjonen f på grunnlag av resultatene i $(a) - (d)$ ovenfor.

f) Beregn arealet begrenset av $x = 1$, x-aksen og grafen til f.

Oppgave 4

En fabrikk produserer to varer, V_1 og V_2, som må bearbeides i to maskiner, A og B. Begge maskiner har kapasitetsbegrensning: Maskin A kan høyst disponeres i 1000 timer og maskin B kan høyst disponeres i 1200 timer under produksjonen.

Videre opplyses det at for å produsere en enhet av varen V_1 trenges det 4 timers bearbeidelse i maskin A og 3 timers bearbeidelse i maskin B. For å produsere en enhet av varen V_2 trenges det 2 timers bearbeidelse i maskin A og 4 timers bearbeidelse i maskin B.

a) La x angi antall enheter som produseres av varen V_1 og y antall enheter som produseres av V_2. Angi det området i xy-planet som tilfredsstiller de begrensninger fabrikken må holde seg til ut fra opplysningene gitt ovenfor.

b) Vi får så opplyst at fortjenesten pr. enhet av varen V_1 er 30 kr, mens fortjenesten pr. enhet av varen V_2 er 20 kr. Hvor mange enheter av de to varene bør fabrikken produsere for å maksimalisere fortjenesten under de gitte rammebetingelser? Hvor stor blir da fortjenesten?

Oppgave 5

a) Et radioaktivt stoff spaltes slik at i et kort tidsintervall Δt er mengden av stoffet som brytes ned tilnærmet proporsjonal med mengden $x(t)$ av stoffet ved det aktuelle tidspunkt og med Δt. Det vil si at:

$$(*) \qquad \Delta x \approx -\lambda \cdot x(t)\Delta t,$$

der $\approx$ betyr "er tilnærmet lik"og λ er en positiv konstant. Forklar hvordan man på grunnlag av $(*)$ kan utlede en separabel differensialligning.

b) Finn den allmene løsningen av differensialligningen omtalt i (a) og bestem deretter λ når det opplyses at halveringstiden for det radioaktive stoffet er T år.

c) Den radioaktive isotopen ^{14}C av karbon som finnes i alt organisk materiale har en halveringstid på 5730 år. Et stykke organisk materiale som graves ut i 1999 inneholder $\frac{1}{8}$ av den andelen ^{14}C som finnes i materialet i levende tilstand. Når døde organismen materialet var en del av?

Oppgave 6

a) Finn $\int_0^\pi (\cos^2 x + \sin^2 x)dx$.

b) Regn ut $\int_0^\pi \cos 2x \, dx$, og benytt dette resultatet og punkt (a) til å bestemme

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx \quad \text{og} \quad \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$$

med minst mulig regning.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Bente Østigård
Telefon: 9 17 40

MNFMA 001 BRUKERKURS I MATEMATIKK

Bokmål
Onsdag 19. mai 1999
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok og kalkulator
Sensur: Onsdag 9. juni 1999

Oppgave 1

Finn ved regning det bestemte integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx.$$

Oppgave 2

Vi har gitt matrisen A ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & a-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

der a er et reellt tall.

a) Finn determinanten til A uttrykkt ved a.

b) Gi en begrunnelse for at A har en invers matrise når $a = 5$. Finn den inverse matrisen når $a = 5$. Vis utregningene.

c) Vi har gitt følgende lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2a - 7 \\ x + (a-3)y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

der a er et reellt tall. Avgjør når ligningssystemet har entydig løsning. Har ligningssystemet løsning for alle verdier av a?

Oppgave 3

Vis at $(z-2)^4 = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 16$. Løs den komplekse ligningen $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z = 0$. Skriv løsningene både på formen $a + ib$ og på polar form. Skisser løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'(t) = a\,y(t) + b$$

der $y(0) = C_0$, uttrykkt ved hjelp av konstantene a, b og C_0.

b) Vi har et kar på 20 *liter* som er fylt med en væske hvor det er blandet inn 10 mg av salt. Vi har så en løsning som inneholder 2 mg/l salt. Denne løsningen tilføres nå karet med 3 l/min. Overskytende væske renner ut av karet slik at volumet i karet er konstant hele tiden. Vi antar også at ved å røre om så vil konsentrasjonen av salt til enhver tid være konstant i hele karet.

La $x(t)$ være mengde salt (i mg) i karet ved tiden t og sett opp en differensialligning som beskriver det som skjer i karet i situasjonen over.

c) Hvor mange liter væske må vi tilføre for at karet skal inneholde 15 mg salt?

Oppgave 5

a) Gitt følgende matrise A der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn egenverdier og egenvektorer til A.

b) Hvert femte år telles antall hundyr i en populasjon. Første gang vi teller så finner vi at det er 100 hundyr i aldersgruppe $0-5$ år og 100 hundyr i aldersgruppe $5-10$ år. Ingen hundyr blir eldre enn 10 år. Undersøkelser har vist at for hvert hundyr i aldersgruppe $0-5$ år vil vi 5 år senere finne et avkom av hunkjønn som er i live. Når hundyret er i aldersgruppen $5-10$ år så vil et hundyr ha produsert i gjennomsnitt $3/2$ hundyr som er i live 5 år senere. Halvparten av hundyrene i aldersgruppen $0-5$ år er i live 5 år senere.

Hvor mange individer av hunkjønn finner vi i de to aldersgruppene 5 og 10 år etter den første tellingen?

c) Sett x_n lik antall hundyr i aldersgruppe $0-5$ år og y_n lik antall hundyr i aldersgruppe $5-10$ år ved telling n. Forklar utifra opplysningene over at fem år senere gjelder

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{3}{2}y_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n. \end{aligned}$$

d) Hvordan vil aldersfordelingen bli i det lange løp?

Oppgave 6

Finn den største verdien funksjonen $f(x,y) = xy^3$ har på kurven $x^4 + y^4 = 1$.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Bente Østigård
Telefon: 95510

Brukerkurs i matematikk, MNFMA 001
Bokmål
Fredag 8. januar 1999
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok og kalkulator
Sensur: 29. januar 1999

Alle delspørsmål teller likt.

Oppgave 1

Finn det bestemte integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

Oppgave 2

En har gitt det lineære ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a \\ x + ay + z &= 2 \\ ax + y + z &= 1 \end{aligned}$$

der a er et reellt tall.

a) Avgjør, uten å løse ligningssystemet, når ligningssystemet har entydig løsning.

b) Har ligningssystemet løsninger for alle verdier av a? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 5

I hele oppgaven holder vi på med det samme bestemte radioaktive stoffet.

a) Et radioaktivt stoff har halveringstid T. Finn et uttrykk for mengden av radioaktivt stoff x som funksjon av tiden t, uttrykt ved hjelp av $x(0)$ og T.

b) Vi tenker oss at vi gjenåpner et gammelt lagringssted for radioaktivt avfall. Mengden av det bestemte radioaktive stoffet på lagringsstedet er k_0 ved gjenåpningstidspunktet. Vi bestemmer oss for å ta imot mengde k av det radioaktive stoffet pr. tidsenhet. Vi ønsker å sette opp en differensialligning som beskriver denne situasjonen.

Forklar at vi får følgende differensialligning

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + k$$

der $x(0) = k_0$ og $\lambda = \frac{1}{T}\ln 2$.

c) Hvor mye radioaktivt stoff kan vi lagre pr. tidsenhet hvis vi ønsker at mengden av radioaktivt stoff på lagringplassen ikke skal øke?

d) Finn et uttrykk for mengden av radioaktivt stoff som funksjon av tiden t, uttrykt ved T, k_0 og k.

Oppgave 6

Finn eventuelle største og minste verdier for funksjonen

$$f(x,y) = (x + 2y + 3)^2 + 2(x-1)^2 - 6$$

der x og y er reelle tall. Svaret skal begrunnes.

Oppgave 3

Løs følgende komplekse ligning

$$z^3 = -8.$$

Svaret skal gis både på polar form og på formen $a + ib$. Skisser løsningene i det komplekse planet.

(Opplysning som kan brukes: $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.)

Oppgave 4

En pensjonist har gjennom lang tid ført oversikt over været på hjemstedet sitt. Han har funnet ut at hvis det er dårlig vær en dag så vil det i 4 av 5 tilfeller også være dårlig vær neste dag. Hvis det er pent vær en dag så er været neste dag pent i 1 av 3 tilfeller.

a) Forklar av vi får følgende overgangsmatrise A som beskriver pensjonistens observasjoner.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(a_{ij} er sannsynlighet for at en er i tilstand i hvis en var i tilstand j en dag tidligere.)

b) Finn egenverdier og egenvektorer til matrisen A.

c) Finn gjennomsnittlig antall finværsdager i løpet av året. (I praksis kan en sette n lik antall dager en betrakter og la $n \to \infty$ for å finne antall dager med fint vær i løpet av et år.)

Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Svein Arne Sikko, tlf. 73 59 14 54

Eksamen Brukarkurs i matematikk, MNFMA 001

Tysdag 19. mai 1998
Kl. 9-15
Hjelpemiddel : Lærebok og kalkulator

Sensur : 9. juni 1998

Oppgåve 1

a) Lat funksjonen f vere definert ved

$$f(t) = e^{at}\cos(\omega t)$$

der a og ω er positive reelle tal. Finn eventuelle nullpunkt for f på intervallet $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$. Rekn ut $f'(t)$ og $f''(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Rekn ut det bestemte integralet

$$\int_0^{2\pi/\omega} e^{at}\cos(\omega t)\,dt$$

Oppgåve 2

For brevpostsendingar set Posten visse grenser på formatet som sendinga kan ha. Ei sending forma som ein rull (sirkulær sylinder) må såleis oppfylle følgjande krav :

Minimumsmål : Lengd + 2 gonger diameter må minst vere 17 cm.
Lengda kan ikkje vere under 10 cm.
Maksimumsmål : Lengd + 2 gonger diameter kan høgst vere 104 cm.
Lengda kan ikkje overskride 90 cm.

Vi skal no studere ei brevpostsending forma som ein rull. Kall lengda l og diameteren d, både målt i cm.
Teikn ein figur i ld–planet som viser kva for val av l og d som oppfyller krava til format.
Lat $A(l,d)$ vere overflatearealet til sendinga, inkludert dei to sirkulære endeflatene, målt i cm^2.
Finn eit uttrykk for $A(l,d)$ og verdiar for l og d som gjer at arealet blir størst mogeleg. Kva blir den maksimale verdien av $A(l,d)$?

Oppgåve 3

For kvart reellt tal c definerer vi matrisa

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ c & 2 & 1 \\ 2 & c & 1 \end{bmatrix}$$

a) Rekn ut determinanten til A_c for alle $c \in \mathbb{R}$. For kva verdier av c er A_c invertibel ?

b) Finn løysingsmengda til likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & -4 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Oppgåve 4

Når ein bakteriekultur blir utsett for kraftig ultrafiolett lys vil bakteriane bli drepe fordi strålinga øydelegg arvestoffet DNA. Ved laboratorieforsøk er det funne at talet på levande bakteriar minkar eksponentielt med lengda på strålingstida.
Anta at 70.5% av bakteriane lever etter 7 sekunder stråling. Kor stor del vil vere i live etter 30 sekund ? Kor lenge må vi utsette kulturen for stråling for å drepe 95% av bakteriane ?

Oppgåve 5

Lat funksjonen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vere gjeven ved $f(x,y,z) = xyz$. Finn maksimumspunkt og maksimumsverdien til f på flata med likning $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

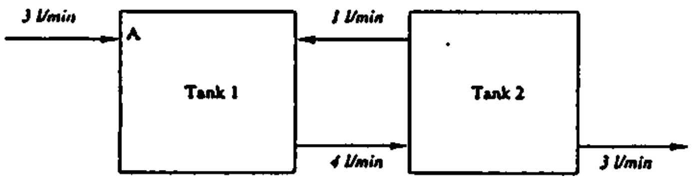
Oppgåve 6

Finn alle dei komplekse løysingane til likninga

$$z^2 - (2+2i)z + 4 + 2i = 0$$

der $i = \sqrt{-1}$ er den imaginære eininga. Ta med mellomrekninga. Skriv svara på forma $a + bi$ med a og b reelle tal og plott løysingane i det komplekse planet.

Oppgåve 7



Dei to tankane på figuren over inneheld ei blanding av salt og vatn, og væskevolumet blir halde konstant lik 100 liter i kvar av dei. Ved A renn ei saltoppløysing med 1 g salt pr. liter inn i Tank1 med ei rate på 3 liter pr. minutt. I dei øvrige røyra renn saltoppløysing med dei ratene og retningane som vist på figuren. I kvar tank blir saltet halde jamt fordelt ved omrøyring. Lat $y_1(t)$ vere saltmengda i Tank1 ved tida t og $y_2(t)$ saltmengda i Tank2 ved tida t. Anta at ved tida $t = 0$ er det oppløyst 2 g salt i Tank1 og 4 g salt i Tank2.

a) Set opp eit system av differensiallikningar med startvilkår som kan tene som modell for den situasjonen som er skildra over.

b) Finn $y_1(t)$ og $y_2(t)$ for alle $t \geq 0$.

MNFMA001 Brukerkurs i matematikk 19.5.98

Fasit

Oppgave 1 a. Nullpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $t = \frac{3\pi}{2\omega}$

b. $\frac{\omega}{a^2+\omega^2}(e^{2\pi a/\omega} - 1)$

Oppgave 2 Området begrenset av $l = 10,\quad 7/2 \leq d \leq 47$
$l + 2d = 17,\quad 10 \leq l \leq 17$
$d = 0,\quad 17 \leq l \leq 104$
$l = 90,\quad 0 \leq d \leq 7$
$l + 2d = 104,\quad 10 \leq l \leq 104$

$A(l,d) = \pi l d + \frac{1}{2}\pi d^2$

$l = \frac{104}{3}$, $d = \frac{104}{3}$, $A_{maks} = \frac{5408}{3}\pi$

Oppgave 3 a. $\det A_c = (c-1)(c-2)(c+3) = c^3 - 7c + 6$

A_c inverterbar for $c \in \mathbb{R} - \{1, 2, -3\}$

b. $x = 2 + t$, $y = 1 + t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

Oppgave 4 22,4 %, 60 sekunder

Oppgave 5 Maksimumsverdi $\frac{\sqrt{3}}{9}$

Maksimumspunkt $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$,
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Oppgave 6 $1 + 3i$, $1 - i$

Oppgave 7 a. $y_1' = -\frac{4}{100}y_1 + \frac{1}{100}y_2 + 3$, $y_1(0) = 2$

$y_2' = \frac{4}{100}y_1 - \frac{4}{100}y_2$, $y_2(0) = 4$

b. $y_1(t) = -73e^{-0{,}02t} - 25e^{-0{,}06t} + 100$

$y_2(t) = -146e^{-0{,}02t} + 50e^{-0{,}06t} + 100$

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Richard Gjerde
73598148

Eksamen i MA 001, *Brukerkurs i matematikk*

Tirsdag 6. januar 1998
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Lærebok og kalkulator
Sensurdato: 27. januar 1998

Oppgave 1

a) Funksjonen g er definert ved

$$g(x) = 2x^2 e^{-x^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

I hvilke intervaller er g voksende? Finn eventuelle maksimums- og minimumspunkter av g.

b) Finn eventuelle asymptoter og skisser grafen til g.

c) Funksjonen f er definert ved

$$f(x,y) = (2x^2 + y)e^{-x^2-y} \; ; \; -\infty < x < \infty, \; -\infty < y < \infty$$

Finn de partielle deriverte av f.
Vis at $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ i punktet $(0,1)$ og bare der.

d) Finn maksimum og minimum av f i området $-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$.
(Vink: Drøftingen i a) er her nyttig. Du kan gå ut fra, uten begrunnelse, at f har et maksimum og et minimum i dette området.)

Oppgave 2

Beregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -21 \\ 3 & 7 & a \end{vmatrix}$$

For hvilke verdier av a har systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + ax_2 - 21x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + ax_3 &= 3 \end{aligned}$$

nøyaktig en løsning?

Oppgave 3

a) Finn den generelle løsning av det homogene differensiallikningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 10x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 9y$$

b) Betrakt så det inhomogene systemet

$$\frac{dx}{dt} = 10x + y - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 9y + 2$$

Finn systemets likevektstilstand.

c) Løs differensiallikningene i punkt b) under initialbetingelsene $x(0) = \frac{3}{8}$, $y(0) = 0$.

Oppgave 4

Finn $r \geq 0$ og $\theta \in [0, 2\pi>$ slik at

$$-1 + i\sqrt{3} = re^{i\theta}$$

og bruk dette til å finne reelle tall x, y slik at

$$(-1 + i\sqrt{3})^{100} = x + iy.$$

Oppgave 5

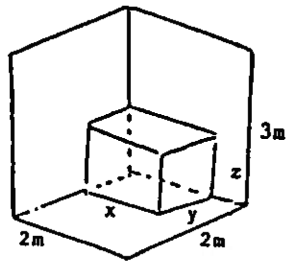
Et kar fylles med vann med tilstrømningshastighet

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \text{ (liter/sek) ; } t > 0.$$

Finn det totale volumet av vann som er strømmet inn i karet i perioden $1 \leq t \leq 4$.

Oppgave 6

Et baderom har takhøyde 3m og et kvadratisk gulv som er 4m^2. I dette rommet skal vi plassere et badekar av lengde x, bredde y og høyde z (målt i meter) og med volum $xyz = \frac{2}{3}\text{m}^3$. Badekaret skal plasseres i det ene hjørnet av baderommet som vist på tegningen.



tifra dimensjonene på rommet og karet får vi: $0 < x < 2$, $0 < y < 2$, $0 < z < 3$ og derfor gså $xy = \frac{2}{3z} > \frac{2}{9}$ (m^2). Vi skal flislegge de to veggene badekaret berører, samt badegulvet, ien vi flislegger bare de delene av veggene og gulvet som badekaret ikke dekker. Vi bruker to rskjellige typer fliser til vegger og gulv. Prisen på veggflisene er 90kr./m^2 og på gulvflisene kr./m^2. La $P(x, y)$ betegne totalprisen på flisene som funksjon av x og y angitt i kr.

a) Vis at vi får $P(x,y) = 1320 - \frac{60}{x} - \frac{60}{y} - 60xy$, og beregn $\frac{\partial P}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$.

b) For å få oversikt over utgiftene til flisleggingen ønsker vi å finne verdien av (x, y) slik at $P(x, y)$ blir størst mulig.

Finn denne verdi av (x, y) og den tilsvarende verdien til P. (Du kan her gå ut fra, uten begrunnelse, at en slik verdi av (x, y) finnes og at den oppfyller; $0 < x < 2$, $0 < y < 2$ og $xy > \frac{2}{9}$.)

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Eksamen i Brukerkurs i matematikk, MA 001

Onsdag 21. mai 1997
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Lærebok og kalkulator.
Sensurdato: 11. juni 1997

Oppgave 1

La funksjonen f være definert ved $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ for $x > 0$.

a) Avgjør hvor f vokser og avtar. Finn eventuelle maksima og minima til f.

b) Avgjør hvor grafen til f krummer oppover og nedover. Finn eventuelle asymptoter. (Det oppgis at $f(x) \longrightarrow 0$ når $x \longrightarrow \infty$.) Skissér grafen til f.

Oppgave 2

En bedrift produserer små og store skrivebord. Fortjenesten pr. skrivebord er kr. 1000 for små og kr. 1500 for store. Produksjonen foregår i 2 produksjonsavdelinger. Hvert lite skrivebord legger beslag på henholdsvis 2 og 1 timer i avdeling I og II. De tilsvarende tallene for hvert stort skrivebord er 3 og 2.

Anta at avdeling I har kapasitet på 16 produksjonstimer hver dag, mens avdeling II har kapasitet på 9 timer hver dag.

Bedriften er forpliktet til å levere 2 små og 1 stort skrivebord hver dag til et annet firma.

La x og y betegne henholdsvis antall små og antall store skrivebord som produseres pr. dag.

a) Tegn en figur i xy-planet som viser hvilke par (x, y) som er mulige produksjonstall utfra betingelsene.

b) Finn fortjenesten F uttrykt ved x og y, og finn den maksimale fortjenesten pr. dag.

c) Hvis bedriften hadde ressurser som skulle benyttes til å øke kapasiteten på produksjons avdelingene, hvilken avdeling burde en i første omgang øke kapasiteten på? Begrun svaret.

Oppgave 3

a) Finn ligningen til tangentplanet til flaten H, gitt ved $z = x^2 + y^2$, i punktet $P = (1, 1, 2$

b) Finn den minste avstanden fra punktet $Q = (1, 1, \frac{1}{2})$ til flaten H ved å bruke Lagrange metode. (Hint: Skriv ned et uttrykk for kvadratet av avstanden fra Q til punktet $(x, y,$ på H.)

Oppgave 4

a) Finn løsningen av differensialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 5y + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -5x - 4y + 1$$

som oppfyller $x(0) = 6$ og $y(0) = -2$.

b) Løsningen i a) blir en harmonisk svingning. Finn middelverdi, amplitude, periode og akrofase til $x(t)$.

Oppgave 5

a) Finn det bestemte integralet

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

b) Finn de to komplekse løsningene til annengradspolynomet

$$z^2 + 2z + 4 = 0$$

Skriv løsningene både på formen $a + ib$ og på polarform $re^{i\theta}$.

Oppgave 6

a) Finn lokale ekstrempunkter til funksjonen f, definert for alle x og y ved

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

Avgjør i hvert tilfelle om det er lokalt maksimums- eller minimumspunkt.

b) Har f i a) noe absolutt (globalt) maksimums- eller minimumspunkt? Begrunn svaret.

c) Cobb-Douglas' produksjonsfunksjon for et nytt produkt er gitt ved

$$F(x,y) = 16x^{0,25}y^{0,75}$$

der x er antall arbeidsenheter og y er antall kapitalenheter som kreves for å produsere $F(x,y)$ enheter av produktet.

Hver arbeidsenhet koster 50 kroner og hver kapitalenhet koster 100 kroner. Dersom kr. 500000 er budsjettert for produksjonen av dette produktet, hvordan skal dette beløpet fordeles mellom arbeid og kapital for å maksimalisere produksjonen? Hva er det maksimale antallet av enheter som kan produseres?

Oppgave 7

For hvilke verdier av a har ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & \frac{1}{2}y & + & z & = & 7 \\ & & ay & + & 2z & = & -5 \\ 4x & - & \frac{1}{2}y & + & (a-2)z & = & 0 \end{array}$$

en éntydig løsning?

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

Eksamen i	**: MA 001 Brukerkurs i matematikk**	
Dato	**: Mandag 06.01.97**	
Varighet	: 6 timer	
Antall vekttall	: 5	Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, Lærebok

Sensur: 27.01.97

Oppgave 1 La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \frac{x^2}{x-a}$$

for alle reelle tall $x \neq a$, der a er en positiv konstant.

(a) Avgjør hvor f vokser og avtar.

(b) Avgjør hvor grafen krummer opp og ned.

(c) Finn eventuelle asymptoter for f, og skisser grafen til f.

Oppgave 2 Et lite bakeri kan produsere loff og grovbrød. Nettofortjenesten er 1 kr. pr. loff og 4 kr. pr. grovbrød. For enkelhets skyld antar vi at at bakeriet lager ett brød av gangen, og at det tar ett minutt å lage en loff, mens det tar to minutter å lage ett grovbrød.

Totalt pågår produksjonen i maksimalt 500 min. pr. døgn ved bakeriet. Av tekniske årsaker kan bakeriet produsere maksimalt 200 grovbrød pr. dag. Bakeriet har en bindende avtale med et hotell om levering av 50 loff og 100 grovbrød hver dag.

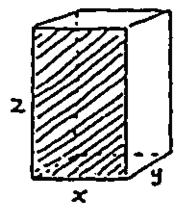
La x og y betegne hhv. antall loff og antall grovbrød som produseres pr. dag.

(a) Tegn en figur som viser hvilke par (x, y) som er mulige produksjonstall utfra betingelsene.

(b) Finn den totale nettofortjenesten F uttrykt ved x og y og finn maksimal nettofortjensete for bakeriet under betingelsene. Hvor mye produseres da pr. dag av loff og grovbrød?

Oppgave 3 I en dyrehage skal det lages et høyt fuglebur.

Lengdene x, y og z måles i meter.



Materialprisene er:

Gulv	kr. 120	pr. m^2
Skravert vegg	kr. 60	pr. m^2
Tak og de tre øvrige veggene	kr. 40	pr. m^2

(a) Finn materialprisen for hele buret uttrykt ved x, y og z. Finn burets lengde y uttrykt ved x og z når samlet beløp for materialene skal være kr. 2400.

(b) Anta at samlet beløp for materialene skal være kr. 2400. Hvilke verdier av x, y og z gjør burets volum størst mulig?

Oppgave 4 Finn alle komplekse løsninger til ligningen

$$z^2 - z + \frac{3}{2} = 0$$

Skriv løsningene på formen $a + bi$.

Oppgave 5 Etter langvarig sykdom trenger kroppen tid til å bygge seg opp fysisk. For å unngå skader lar idrettsfolk denne oppbygningen skje gradvis. Treningen økes med en fast prosent hver uke. Vi antar at kroppen første uke tåler $a_1 = 1$ (time) trening. La a_n være treningsmengden i uke n.

(a) Still opp en formel for treningsmengdene i ukene 2, 3 og n når treningen økes med p prosent hver uke.

(b) Etter et halvt år regner vi med full restitusjon. Kroppen tåler den 26. uka 7 timer trening (1 time hver dag). Hvor stor ukentlig økning gir dette?

(c) Hvor mange timer gir dette tilsammen på dette halve året (26 uker)?

Oppgave 6 Et vann er tynt befolket av et visst fiskeslag. La $x(t)$ være populasjonens størrelse (i antall) ved tiden t. Anta at sjansen for at en gitt fisk skal møte en vilkårlig annen fisk i et lite tidsintervall er proporsjonal med populasjonens størrelse.

(a) Anta at fødselsraten er proporsjonal med antall tilfeldige møter av to fisk, og at dødsraten er proporsjonal med antall fisk, og vis at dette leder til differensialligningen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax$$

der a og b er positive konstanter. Forklar spesielt fortolkningen av leddene bx^2 og ax.

(b) Anta at den opprinnelige populasjonsstørrelsen er $x(0) = x_0$, og finn $x(t)$.

(c) Vis at det finnes en konstant k_0 slik at hvis $x_o < k_0$, så vil populasjonen etterhvert dø ut, mens hvis $x_o > k_0$, så vil populasjonen vokse over alle grenser på en endelig tid. Finn k_0 og denne endelige tiden.

Anta nå at fisken høstes med en konstant rate $c > 0$ fra tiden $t = 0$. slik at ligningen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax - c$$

gjelder. Anta igjen at den opprinnelige populasjonsstørrelsen er $x(0) = x_0$, og anta $x_0 > k_0$.

(d) Finn en verdi c_0 av c slik at fiskepopulasjonen holder seg konstant lik x_0 hvis fisken høstes med den konstante raten c_0.

Oppgave 7 Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = 9 \\ & 2x_2 & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = -\frac{5}{2} \\ x_1 & +8x_2 & -x_3 & & = -1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = 13 \end{array}$$

Angi også dimensjonen til løsningsmengden.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene eller ved hjelp av tastafon (telefon med stjerne og firkanttast, vil en kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisninger som blir gitt. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

Eksamen i : **MA001 BRUKERKURS I MATEMATIKK**

Dato : **Tirsdag 21. mai 1996**

Varighet : **6 timer**
Antall vekttall : **5**

Tillatte hjelpemidler:
Kalkulator, lærebok

Sensur: 18.juni

Oppgave 1 La $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

(a) Hva er den største definisjonsmengden f kan ha? Finn eventuelle maksimums - og minimumspunkter og eventuelle asymptoter.

(b) La $F(x)$ være Taylorpolynomet av grad 2 til f i $x = 0$. Finn et utrykk for $F(x)$ og tegn grafene til f og F i samme koordinatsystem.

Oppgave 2

(a) Finn alle komplekse løsninger til likningen

$$z^2 - z + \tfrac{3}{2} = 0.$$

Skriv løsningene på formen $a + ib$.

Oppgave 3

I en kommune har en funnet at den relative (spesifikke) fødselsrate for elg er 0.14 (pr. år), mens den relative (spesifikke) dødsraten er 0.09 (pr. år). La $N(t)$ være antall elg ved tidspunktet t (t måles i år).

(a) Anta at det drives elgjakt og at den relative (spesifikke) jaktraten er k (pr. år). Still opp en differensiallikningsmodell for $N(t)$ ut fra de gitte opplysningene. Hvis det er 2000 elg på et gitt tidspunkt, hvor stor må k være for at det skal være 2500 elg 20 år senere?

(b) Anta nå at den relative (spesifikke) jaktraten er proporsjonal med antall elg, dvs. lik $cN(t)$ der c er en positiv konstant. Still opp en differensiallikningsmodell for $N(t)$ i dette tilfellet. Bestem c slik at antall elg med tiden stabiliserer seg på 2500.

Oppgave 4

(a) Beregn det bestemte integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \sin x}\, dx.$$

(b) Beregn det ubestemte integralet

$$\int 4x^3 e^{x}\, dx.$$

Oppgave 5

(a) La a være et reelt tall. Regn ut determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 6+a \\ 3 & -3-a & 4+a \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Undersøk for hvilke verdier av a systemet

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 6+a \\ 3 & -3-a & 4+a \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

har entydig løsning, ingen løsning eller uendelig mange løsninger.

Oppgave 6 I barnehagen har Anne og Gro fått hvert sitt glass inneholdende 2 dl saft. Anne er imidlertid ikke fornøyd, siden Gro har fått søt saft, mens hun selv har fått usukret saft. Anne får Gro med seg på følgende lek: Hun heller 0.5

dl av sin saft over i Gros glass, rører godt rundt og heller så like mye saft tilbake i sitt eget glass. Denne prosedyren gjentas flere ganger.

La a_n og g_n være sukkermengden i glasset til henholdsvis Anne og Gro etter at prosedyren er utført n ganger.

(a) Forklar hvorfor opplysningene ovenfor gir oss likningene:

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2g_n$$

$$g_{n+1} = 0,2a_n + 0,8g_n.$$

(b) La M være matrisen slik at

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_n \\ g_n \end{bmatrix}.$$

Finn M's egenverdier og de tilhørende egenvektorer.

(c) Skriv $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en sum av egenvektorer for M og finn $M^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Hvor mange ganger må prosessen utføres for at forholdet mellom sukkerinnholdet i Annes og Gros saft skal være minst 0,95?

Oppgave 7 En funksjon er definert for alle x og y ved

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}.$$

Finn største og minste verdi av f når $x^2 + y^2 = 1$.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.