Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

MA0002 Brukerkurs i matematikk B

Lørdag 10. juni 2006
Kl. 9–13
Hjelpemidler: Alle trykte og skrevne hjelpemidler, én lommeregner
Sensur: 1. juli 2006

Avsluttende eksamen består av to deler:

1. Oppgavene på neste side.
2. Vedlegg med flervalgsprøve.

Vedlegget skal leveres i utfylt stand sammen med besvarelsen for del (1). Ved vurderingen av avsluttende eksamen teller del (1) og (2) likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller midtsemesterprøve med 20 % hvis dette er til fordel for kandidaten.

I vurderingen av del (1) (neste side) teller hvert bokstavpunkt likt.

I del (1) skal alle svar begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori). Reine kalkulatorsvar eller tabelloppslag godtas ikke.

Oppgave 1

Et laboratorium undersøker algevekst ved en temperatur rundt vannets frysepunkt. Algene gror på en sirkulær plate med radius 1 dm. Temperaturen målt i °C i punktet (x,y) på plata er

$$f(x,y) = \frac{4(x+1)}{1+4(x+1)^2+y^2},$$

der x og y er koordinatene målt i desimeter i et koordinatsystem med origo i sentrum av den sirkulære plata, slik at $x^2+y^2 \leq 1$.

a) Finn de partielle deriverte til f.

b) I hvilken retning fra punktet $(0,0)$ øker temperaturen mest?

c) Finn kritiske punkter (x,y) for f i det indre av definisjonsmengden (dvs. slik at $x^2+y^2<1$). Du trenger ikke å undersøke hvilken type kritisk punkt det er.

d) Finn høyeste og laveste temperatur på plata. (Her kan det bli en del regning.)

Oppgave 2

Gitt matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

a) Finn invers matrise til M.

b) Finn egenverdiene til M.

c) Finn en egenvektor for hver av egenverdiene.

I en fuglebestand er det 10 ungfugler og 10 voksne fugler. Etter n år er antall ungfugler og antall voksne fugler henholdsvis første og andre element i $M^n\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$.

d) Hva blir forholdet mellom antall ungfugler og antall voksne fugler etter mange år? Hva er bestandens relative vekstrate i det lange løp?

Eksamen i MA0002 Brukerkurs i matematikk B – vedlegg
Lørdag 10. juni 2006

Alle trykte og skrevne hjelpemidler og én lommeregner tillatt.

Kryss av ett svaralternativ for hver oppgave på skjema på baksida! Du får ett poeng for hvert riktige svar og null poeng for hvert gale svar. Avkryssing av flere alternativ gir null poeng.

NB! Det er tekst på begge sidene av arket! Alle oppgavene har fem svaralternativ.

Oppgave 1. En løsning x av differensiallikningen $3x^2\frac{dx}{dt} + t = 0$ er lik 2 når $t = 4$. Omtrent hva er x lik når $t = 0$?

(a) 4,52 **(b)** 1,52 **(c)** 2,52 **(d)** 3,52 **(e)** 5,52

#
Oppgave 2. Hvilke typer likevektspunkter har differensiallikningen $dy/dt = -2(1-y)(2-y)y$?

(a) To ustabile **(b)** Ett stabilt og to ustabile **(c)** To stabile **(d)** Ett stabilt og ett ustabilt **(e)** To stabile og ett ustabilt

Oppgave 3. Finn den retningsderiverte av $x^2 + y^2$ i $(x, y) = (1, -1)$ i retning $[-3 \quad 4]'$.

(a) 14 **(b)** -14 **(c)** 0 **(d)** $-2{,}8$ **(e)** 2,8

#
Oppgave 4. Anta at x, y og z tilfredsstiller likningssystemet $x - 3y + 2z = -9$, $3x + 2y + 5z = -3$, $y + z = 0$. Hvilket er sant av følgende utsagn?

(a) $y = 2$ **(b)** $y = -1$ **(c)** $y = 1$ **(d)** $y = 0$ **(e)** $y = -2$

Oppgave 5. Hvilken type kritisk punkt er $(2, -1)$ for funksjonen f definert ved at $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$ for alle (x, y)?

(a) $(2, -1)$ er ikke et kritisk punkt **(b)** Lokalt minimum **(c)** Stigbøylepunkt **(d)** Salpunkt **(e)** Lokalt maksimum

Oppgave 6. La $z = \sin e^{x+y}$. Finn $\partial z/\partial y$.

(a) $\cos e^{x+y}$ **(b)** $ye^{x+y}\cos e^{x+y}$ **(c)** $e^{x+y}\cos e^{x+y}$ **(d)** $y\cos e^{x+y}$ **(e)** $xe^{x+y}\cos e^{x+y}$

Oppgave 7. 3 mg av en type albumin injiseres i blodet til en pasient. Mengden (i mg) etter t minutter er x i blodet og y i leveren, der x og y tilfredsstiller systemet $dx/dt = -0{,}06x + 0{,}03y$, $dy/dt = 0{,}06x - 0{,}03y$ av differensiallikninger. Når $t = 0$, er $x = 3$ og $y = 0$. Hvor mye albumin er det i leveren etter ett minutt?

(a) 0,17 mg **(b)** 1,67 mg **(c)** 2,17 mg **(d)** 1,17 mg **(e)** 0,67 mg

Oppgave 8. Regn ut determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

(a) -4 **(b)** 0 **(c)** -3 **(d)** -1 **(e)** -2

Oppgave 9. Hva er likningen til tangentplanet til $z = x^3 + y^3 + x^2/y$ i punktet $(2, 1, 13)$?

(a) $-x + 16y - z = 1$ **(b)** $-x + 16y + z = 27$ **(c)** $16x - y - z = 18$ **(d)** $2x + y + 13z = 174$

(e) $16x - y + z = 44$

Oppgave 10. Konsentrasjonen y (i M) av et stoff i en kjemisk reaksjon tilfredsstiller differensiallikningen $dy/dt + y + 4e^{-3t} = 0$, der t er tida (i ms). Ved $t = 0$ er $y = 3$. Hva er konsentrasjonen etter 1 ms?

(a) 0,37 M **(b)** 0,27 M **(c)** 0,17 M **(d)** 0,47 M **(e)** 0,07 M

Oppgave	a	b	c	d	e
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Studentnummer

Studieprogram

Inspektør

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

MA0002 Brukerkurs i matematikk B

Mandag 19. desember 2005
Kl. 15–19
Hjelpemidler: Alle trykte og skrevne hjelpemidler, én lommeregner
Sensur: 19. januar 2006

Avsluttende eksamen består av to deler:

1. Oppgavene på neste side.
2. Vedlegg med flervalgsprøve.

Vedlegget skal leveres i utfylt stand sammen med besvarelsen for del (1). Ved vurderingen av avsluttende eksamen teller del (1) og (2) likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller midtsemesterprøve med 20 % hvis dette er til fordel for kandidaten.

I vurderingen av del (1) (neste side) teller hvert bokstavpunkt likt.

I del (1) skal alle svar begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori). Reine kalkulatorsvar eller tabelloppslag godtas ikke.

Oppgave 1

På en marinbiologisk forskningsstasjon er det et kvadratisk akvarium på 2×2 meter. Dybden i akvariet målt i meter er $f(x,y) = e^{-x^2-3y^2}$, der x og y er koordinatene målt i meter i et koordinatsystem med origo i midten av akvariet og akser parallelle med sidene i akvariet, slik at $-1 \le x \le 1$ og $-1 \le y \le 1$.

a) Finn de partielle deriverte til f.

b) I hvilken retning fra punktet $(1,1)$ øker dybden mest?

c) Hva er største og minste dybde i akvariet?

d) En krabbe krabber på bunnen av akvariet langs sirkelen $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Hvor dypt er det når krabben er nærmest overflaten, og hvor skjer det?

Oppgave 2

Gitt matrisen

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Finn invers matrise til M.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

c) Finn generell løsning av differensiallikningssystemet

$$dx/dt = -2x + 2y$$
$$dy/dt = x - 3y.$$

d) Finn den spesielle løsningen av differensiallikningssystemet fra (c) som tilfredsstiller $x = 5$ og $y = 1$ når $t = 0$.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

MA0001 Brukerkurs i matematikk A

Torsdag 9. juni 2005
Kl. 9–13
Hjelpemidler: Alle trykte og skrevne hjelpemidler, én lommeregner
Sensur: 30. juni 2005

Avsluttende eksamen består av to deler:

1. Oppgavene på neste side.
2. Vedlegg med flervalgsprøve.

Vedlegget skal leveres i utfylt stand sammen med besvarelsen for del (1). Ved vurderingen av avsluttende eksamen teller del (1) og (2) likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller midtsemesterprøve med 20 % hvis dette er til fordel for kandidaten.

I vurderingen av del (1) (neste side) teller hvert bokstavpunkt likt.

I del (1) skal alle svar begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori). Reine kalkulatorsvar eller tabelloppslag godtas ikke.

I alle de følgende oppgavene er funksjonen f definert ved at $f(x) = x + \cos x$ for alle x i definisjonsmengden, som er $[0, 2\pi]$.

Oppgave 1

a) Bestem f' og f''. Finn alle nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter for f.

b) Gi en grov skisse av grafen til f, der punktene fra (a) og monotoniegenskaper og konkavitetsegenskaper er korrekt markert.

Oppgave 2

Regn ut $\int_0^{2\pi} x f(x)\,dx$.

Oppgave 3

a) Hvorfor har f en invers funksjon f^{-1}? Hva er definisjonsmengden til f^{-1}?

b) Finn andregrads taylorpolynom om 0 for f. Bruk dette til å finne en tilnærmet verdi av $f^{-1}(1{,}1)$.

Oppgave 4

En funksjon g som er deriverbar på hele sin definisjonsmengde, er definert slik at $y = g(x)$ tilfredsstiller $1 + 2\pi \sin y = x + \cos x$ for alle x i definisjonsmengden. Finn dy/dx uttrykt ved x og y.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

MA0002 Brukerkurs i matematikk B

Onsdag 8. desember 2004
Kl. 9–13
Hjelpemidler: Alle trykte og skrevne hjelpemidler, én lommeregner
Sensur: 29. desember 2004

Oppgavene til avsluttende eksamen består av to deler:

1. Oppgavene på de neste sidene.
2. Vedlegg med flervalgsprøve.

Vedlegget skal leveres i utfylt stand sammen med besvarelsen for del (1). Ved vurderingen av avsluttende eksamen teller del (1) og (2) likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller midtsemesterprøve med 20 % hvis dette er til fordel for kandidaten.

I vurderingen av del (1) (de neste sidene) teller hvert bokstavpunkt likt.

I del (1) skal alle svar begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori). Reine kalkulatorsvar eller tabelloppslag godtas ikke.

Oppgave 1

a) Finn egenverdiene til
$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn en egenvektor for hver av egenverdiene.

En insektpopulasjon består av juvenile insekter (i sitt første leveår) og voksne insekter (i sitt andre leveår). Første juli hvert år er det slik at antall juvenile neste år på samme dato utgjør 60 % av årets juvenile pluss 80 % av årets voksne, mens antall voksne neste år på samme dato utgjør 90 % av årets juvenile.

La x_t og y_t være henholdsvis antall juvenile og voksne første juli år t, der $t \geq 0$ er et heltall.

c) Forklar hvorfor
$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}$$
for alle heltall $t \geq 1$.

Uttrykk $\left[\begin{smallmatrix} x_t \\ y_t \end{smallmatrix}\right]$ ved hjelp av en potens av A og $\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right]$.

La $x_0 = 1\,000$ og $y_0 = 2\,000$.

d) Hva blir forholdet mellom antall juvenile og antall voksne etter mange år? Hva er populasjonens relative vekstrate i det lange løp?

Oppgave 2

En fabrikk skal lage esker uten lokk. Bunnen er rektangulær, og de fire sideflatene er rektangulære og står vinkelrett på bunnen. La sidekantene i bunnen ha lengde x og y, og la høyden på eska være z – alt målt i desimeter (dm).

a) Hva blir volumet til eska uttrykt ved x, y og z, og hva blir det samlede arealet av bunn og sideflatene?

Det blir bestemt at eska skal ha volum 4 liter (4 dm^3).

b) Vis at overflatearealet er

$$f(x,y) = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

når volumet er lik 4.

Regn ut de partielle deriverte f_x og f_y.

c) Har f noe absolutt maksimum i området $x > 0,\ y > 0$?

Fabrikken ønsker å ha minst mulig overflateareal for å spare kostnader.

d) Finn x og y slik at eska (som har volum 4 liter) får minst mulig overflateareal. Hva blir z og overflatearealet? Det oppgis at f virkelig har et absolutt minimum i området $x > 0$, $y > 0$.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

MA0002 Brukerkurs i matematikk B

Torsdag 13. mai 2004
Kl. 9–13
Hjelpemidler: Alle trykte og skrevne hjelpemidler, én lommeregner
Sensur: 3. juni 2004

Oppgavene til avsluttende eksamen består av to deler:

1. Oppgavene på de neste sidene.
2. Vedlegg med flervalgsprøve.

Vedlegget skal leveres i utfylt stand sammen med besvarelsen for del (1). Ved vurderingen av avsluttende eksamen teller del (1) og (2) likt.

I tillegg til avsluttende eksamen teller midtsemesterprøve med 20 % hvis dette er til fordel for kandidaten.

I vurderingen av del (1) (de neste sidene) teller hvert bokstavpunkt likt.

I del (1) skal alle svar begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med). Reine kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1

a) Finn egenverdiene til

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

b) Finn en egenvektor for hver av egenverdiene.

En maurkoloni har fordelt seg på to tuer, A og B. Til enhver tid vil 90 % av maurene som sist overnattet i tue A også overnatte der neste natt, mens 10 % av dem tilbringer neste natt i tue B. Av maurene som sist overnattet i tue B, flytter 50 % over til tue A neste natt, mens 50 % blir værende i tue B.

La x_n og y_n være antall maur som overnatter i henholdsvis tue A og B natt nr. n, der $n \geq 0$ er et heltall.

c) Forklar hvorfor

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

for alle heltall $n \geq 1$.

Uttrykk $\left[\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right]$ ved hjelp av M, n og $\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right]$.

La $x_0 = 18\,000$ og $y_0 = 6\,000$.

d) Uttrykk x_n og y_n bare ved hjelp av n. Hvordan blir fordelingen av maur på de to tuene etter mange netter?

Oppgave 2

En fabrikk skal lage esker uten lokk. Bunnen er rektangulær, og de fire sideflatene er rektangulære og står vinkelrett på bunnen. La sidekantene i bunnen ha lengde x og y, og la høyden på eska være z – alt målt i desimeter (dm).

a) Hva blir volumet til eska uttrykt ved x, y og z, og hva blir det samlede arealet av bunn og sideflatene?

Det blir bestemt at eska skal ha volum 4 liter (4 dm^3).

b) Vis at overflatearealet er

$$f(x,y) = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

når volumet er lik 4.

Regn ut de partielle deriverte f_x og f_y.

c) Har f noe absolutt maksimum i området $x > 0,\ y > 0$?

Fabrikken ønsker å ha minst mulig overflateareal for å spare kostnader.

d) Finn x og y slik at eska (som har volum 4 liter) får minst mulig overflateareal. Hva blir z og overflatearealet? Det oppgis at f virkelig har et absolutt minimum i området $x > 0$, $y > 0$.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Bente Østigård
Telefon: 9 35 20

MNFMA001, Brukerkurs i matematikk

Bokmål
Mandag 8. desember 2003
Kl. 9-15

Hjelpemidler:
Lærebok Tor Gulliksen, Matematikk i praksis, Universitetsforlaget.
Et A4-ark med notater. Kalkulator HP30S (Hjelpemiddelkode D)

Sensur: Mandag 5. januar 2004

Oppgave 1

La funksjonen f, der $f : \Re \to \Re$, være gitt ved

$$f(x) = x \sin(\pi x^2).$$

a) Finn nullpunktene til f. Diskuter fortegnet til f og skisser grafen.

b) Beregn det ubestemte integralet

$$\int x \sin(\pi x^2)\, dx.$$

c) Bruk det du har funnet over til å bestemme arealet av området begrenset av kurven $y = f(x)$, x-aksen og linjene $x = 0$ og $x = \sqrt{2}$.

Oppgave 2

En ønsker å forandre fôret til noen hester fra bare bygg til en blanding av bygg og havre. En ønsker å legge opp en fôrplan slik at andelen bygg avtar med en fast prosent hver dag. Den totale mengden fôr per dag er 20 kg.

a) Det blir bestemt at andel bygg skal reduseres med 10 % hver dag. En ønsker at fôret skal bestå av 30% bygg og 70% havre. Hvor mange dager må en bruke på å legge om fôret?

b) Hvor mye bygg og hvor mye havre trenger en i denne omleggingsperioden?

Oppgave 3

Løs ligningssystemet for alle valg av a :

$$\begin{aligned} x + ay &= 2 \\ ax + y &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 4

Et jordlag består av to sjikt av forskjellig beskaffenhet. Modellen nedenfor beskriver vanninnholdet i dette jordlaget etter et kraftig regnskyll. La $x(t)$ og $y(t)$ være vanninnholdet i hvert av de to sjiktene t timer etter at regnværet stopper, $x(t)$ og $y(t)$ er målt i mm.

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= -k_1 x \\ \tfrac{dy}{dt} &= k_1 x - k_2 y \end{aligned}$$

der $k_1 = 4$ per time, $k_2 = 2$ per time. Når regnet slutter, er $x(0) = 10$ mm, $y(0) = 5$ mm.

a) Løs differensialligningssystemet over.

b) Bestem $\lim_{t\to\infty} \frac{y^2(t)}{x(t)}$.

Oppgave 5

a) Finn egenvektorer og tilhørende egenverdier for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

b) En skoleklasse har et år laget og hengt opp fuglekasser i et skogsområde. Alle fuglekassene blir hengt opp på vinteren før hekkesesongen starter. Elevene anslår at hvis en fuglekasse er tom et år, så er sannsynligheten for at den skal være bebodd neste år lik 0.6. Hvis en fuglekasse derimot er bebodd et år, så er sannsynligheten for at den er bebodd neste år lik 0.5. La x_n være andel tomme fuglekasser i år n og la y_n være andel bebodde fuglekasser i år n. Forklar at $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. Finn andel bebodde fuglekasser første, andre og tredje året.

c) Elevene har beregna at det vil komme til å hekke 60 fuglepar i løpet av sesongen. Hvor mange fuglekasser må de henge opp for at 60 fuglepar skal kunne hekke i det lange løp?

Oppgave 6

Hva er den største verdien produktet av to tall kan ha når summen av dem er lik 2?

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Bente Østigård
Telefon: 73 59 35 20

MNFMA001, Brukerkurs i matematikk

Bokmål
Tirsdag 13. mai 2003
Kl. 9-15

Hjelpemidler:
Lærebok Tor Gulliksen, Matematikk i praksis, Universitetsforlaget.
Et A4-ark med notater. Kalkulator HP30S (Hjelpemiddelkode D)

Sensur: Tirsdag 3. juni 2003

Oppgave 1

a) Bestem

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

b) Beregn det bestemte integralet

$$\int_2^7 x\sqrt{x+2}\,dx.$$

Oppgave 2

En produsent av konfekt har 130 kg kirsebærsjokolade og 170 kg mintsjokolade på lager. Produsenten ønsker å selge to ulike blandinger som inneholder disse to sjokoladetypene. Blanding A skal bestå av halvparten kirsebærsjokolade og halvparten mintsjokolade. Denne blandingen skal han selge for 200 kr per kilo. Blanding B skal bestå av en tredjedel kirsebærsjokolade og to tredjedeler mintsjokolade. Denne blandingen skal han selge for 125 kr per kilo.

La x være antall kilo av blanding A og y antall kilo av blanding B. Angi det området i xy-planet som oppfyller kravene over. Hvor mange kilo av hver blanding bør sjokoladeprodusenten lage for å få høyest mulig inntekt?

Oppgave 3

En kjegleformet tank med radius r og høyde h fylles med væske. Etter som tiden går vil denne væsken fordampe. La $y(t)$ betegne høyden av væskesøylen etter tid t og $x(t)$ betegne den tilhørende radius ved tid t.

a) Forklar at

$$y(t) = \frac{h}{r}x(t).$$

Vis at volumet $V(t)$ av væsken ved tid t er gitt ved

$$V(t) = \frac{\pi}{3}\frac{h}{r}x^3(t).$$

b) En antar at fordampningen av væsken er proporsjonal med væskeoverflaten. Forklar at dette gir

$$\frac{dV}{dt} = -k\pi x^2(t)$$

der k er en positiv konstant.

c) Ved måling finner en at etter tid t_1 så er radius på væskeoverflaten lik r_1, der t_1 og r_1 regnes som kjente størrelser. Ved å bruke opplysningene over skal du vise at

$$\frac{dx}{dt} = -k\frac{r}{h}$$

der $x(0) = r$, $x(t_1) = r_1$.

d) Finn et uttrykk for volumet $V(t)$ av væsken i tanken som funksjon av tiden t (uttrykt ved hjelp av r, h, r_1, t_1).

(Hint: Volum av en kjegle (kremmerhus) med radius R og høyde H er $\frac{\pi}{3}R^2H$.)

Oppgave 4

a) Matrisen A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Finn egenvektorene og tilhørende egenverdier til A.

b) På en skytekonkurranse fant en av publikum ut at 8 av 10 skyttere som bomma på et skudd, også bomma på neste skudd. Av de skytterne som traff på et skudd, så ville 3 av 10 skyttere bomme på neste skudd. En skytter som skulle skyte sitt første skudd, hadde samme sannsynlighet for å bomme som en skytter som bomma på forrige skudd.

La x_n være sannsynlighet for at skytteren bommer på skudd n, og la y_n være sannsynligheten for at skytteren treffer på skudd n. Forklar at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

c) Finn sannsynlighetsfordeling for første skudd, andre skudd og tredje skudd. Finn et uttrykk for sannsynlighetsfordelingen $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ til det n´te skuddet.

Oppgave 5

a) Skisser flaten i R^3 gitt ved

$$x + y + z = \pi$$

der $x, y, z \in [0, \pi]$.

b) Undersøk hvilke verdier

$$\sin x + \sin y + sinz$$

kan anta når x, y, z er vinklene i en trekant.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Alf Birger Rustad
Telefon: 9 77 74

MNFMA001, Brukerkurs i matematikk
Bokmål
Tirsdag 21. mai 2002
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok, utdelt kalkulator og håndskrevne notater
Sensur: 11. juni 2002

Oppgave 1

a) Finn grenseverdiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2+1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\sin x}$$

b) Finn Taylor polynomet av grad n til funksjonen $f(x) = e^x - 1 - x$.

Oppgave 2 Regn ut integralene

$$\int x(x+1)^6\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} x\sin(x^2)\,dx$$

Oppgave 3 En dyrepopulasjon antas å følge differensiallikningen

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a(B-N) \qquad ; a, B > 0$$

hvor N er antall individer i populasjonen, og tiden t måles i år.

a) Anta at populasjonen har relativ vekstrate på 10 per år, og at populasjonen består av 1100 individer på et gitt tidspunkt. Hva er da vekstraten til populasjonen på det gitte tidpunktet?

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen, gjør rede for eventuelle konstante løsninger, og skisser de typiske integralkurvene for løsningene.

c) Du får oppgitt at populasjonen ved $t = 0$ er 1000, og at bærekapasiteten til populasjonen er 2000. Etter ti år blir det estimert at populasjonen har 1500 individer (ved $t = 10$). Regn ut a.

Oppgave 4 Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5 Betrakt funksjonen

$$f(x,y) = ye^x$$

a) Finn gradienten til $f(x,y)$.

b) Finn tangentplanet til $f(x,y)$ i punktet $(0,1)$.

c) Finn eventuelle ekstrempunkter til $f(x,y)$ under bibetingelsen

$$x^2 + y^2 = 1$$

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Alf Birger Rustad
Telefon: 97774

MNFMA 001, Brukerkurs i matematikk

Bokmål
Mandag 7. januar
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok, utdelt kalkulator og håndskrevne notater
Sensur: Mandag 28. januar 2002

Oppgave 1

a) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{x}$$

b) Beregn integralene

$$\int 3x^2(x^3+1)^{10}dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

Oppgave 2

a) Finn løsningen til differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = 5y + 3$$

hvor du får oppgitt at $y(1) = 0$

b) Finn den generelle løsningen til likningen

$$\frac{dy}{dt} = e^{-y}\cos t$$

Oppgave 3 En populasjon med dyr deles inn i tre aldersklasser, hver med et tidspenn på fem år. Kun antall hunnkjønn i populasjonen betraktes. De fem første årene føder hvert individ i snitt ett avkom (som er hunnkjønn), mens de neste fem årene fødes det i snitt fire (per gjenlevende individ). Blant individene som er over ti år fødes det ingen nye individ. Halvparten av individene overlever de første fem leveårene, tredve prosent av disse overlever de neste fem årene.

a) Sett opp Leslie matrisen M som modell for populasjonsdynamikken beskrevet ovenfor, d.v.s. sett inn tall i følgende matrise:

$$M = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til M.

c) Anta at aldersfordelingen ved et gitt tidspunkt er gitt ved vektoren $(600, 300, 100)$ (d.v.s. 600 individer under fem år, 300 mellom fem og ti år, og 100 individer over ti år). Hva blir aldersfordelingen femti år etter? Kan du utfra egenverdiene og egenvektorene til M si noe om hvor realistisk denne modellen er?

Oppgave 4 La funksjonen f definert i hele planet være gitt ved

$$f(x,y) = 2x - x^2 + 2y^2 - y^4.$$

a) Finn gradienten til f. Beregn den retningsderiverte til f i punktet $(0,1)$ og i retningen $\vec{v} = (1,1)$.

b) Finn tangentplanet til f i punktet $(0,1)$.

c) Finn lokale ekstrempunkt til f. Avgjør hvilken type ekstrempunkter du finner (maksimum, minimum, evt. globalt).

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Per Hag
Telefon: 9 17 43

MNFMA001, Brukerkurs i matematikk

Bokmål
Onsdag 23. mai 2001
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok og utdelt kalkulator
Vedlegg: Kopi av Oppgave 2 for innlevering, millimeterpapir
Sensur: 13. juni 2001

Oppgave 1

a) Funksjonen f er definert for alle reelle tall ved:

$$f(x) = 60x^2 - x^3$$

Finn $f'(x)$ og $f''(x)$, og bestem deretter de punktene der $f(x) = 0$, der $f'(x) = 0$ og der $f''(x) = 0$.

b) Avgjør hvor grafen skjærer x-aksen, hvor den har horisontal tangent og hvor den har vendepunkt. Gjennomfør deretter fortegnsdrøftinger for f, f' og f''.

c) Bestem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Benytt så opplysningene ovenfor til å tegne en skisse av grafen til f. (Ren kalkulatorberegning gir ingen kreditt når det gjelder tegning av grafen.)

d) To ikke-negative tall har sum 60. Bestem disse tallene slik at produktet av det ene med kvadratet av det andre er størst mulig. Begrunn svaret.

Oppgave 2

NB! I denne oppgaven skal du sette ring omkring det svaret du mener er riktig i hvert av punktene. <u>Begrunnelse kreves ikke!</u>

a) Likheten $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ gjelder:

(i) alltid, (ii) aldri, (iii) for visse a og b

b) Dersom x er et positivt tall som oppfyller ligningen: $1 + \frac{1}{x} = x$, så er:

(i) $x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, ($ii$) $x = 3$, (iii) $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

c) $x > \frac{1}{x}$ er ekvivalent med:

(i) $x \in \langle -1, 1\rangle$, ($ii$) $x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$, ($iii$) $|x| > 1$.

d) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} =$:

(i) $\frac{2}{5}$, (ii) $\frac{5}{2}$, (iii) $\left(\frac{8}{125}\right)^3$.

e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} =$:

(i) 2, (ii) $2 - \frac{1}{2^n}$, (iii) $2 + \frac{1}{2^n}$.

f) $\log_a e =$:

(i) $\log a$, (ii) $\ln a$, (iii) $\log e / \log a$.

g) $e^{i\frac{\pi}{4}} =$:

(i) $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$, ($ii$) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, ($iii$) i.

Oppgave 3

a) Forklar hvordan du lettest kunne tegne de to rette linjene:

$$x + 2y = 60 \quad \text{og} \quad 2x + y = 60$$

dersom du hadde linjal men ingen lommeregner. Tegn skisser. Bestem skjæringspunktet mellom disse linjene v.h.a. Gauss-Jordan-eliminasjon.

Hvordan kan du nå tegne linjen

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 10$$

på enklest mulig måte?

b) En gårdbruker disponerer totalt 60 dekar jord der han kan dyrke soyabønner og korn. Han har 6000 kr. til dette formål, og vi antar at det koster ham 100 kr. pr. dekar å dyrke soyabønner og 200 kr. pr. dekar å dyrke korn. Videre kreves det 2 dagsverk å dyrke opp en dekar med soyabønner og 1 dagsverk å dyrke opp en dekar med korn. Han kan totalt bruke 60 dagsverk på dette arbeidet.

Tegn opp det området i xy-planet der disse rammebetingelsene er oppfylt når x angir antall dekar som dyrkes med soyabønner og y antall dekar som dyrkes med korn.

c) Gårdbrukeren tjener 2000 kr pr. dekar for soyabønner og 7000 kr. pr. dekar for korn. Bestem antall dekar soyabønner og antall dekar korn som det lønner seg for gårdbrukeren å dyrke for å maksimalisere inntekten under rammebetingelsene gitt i punkt b). Angi maksimalinntekten.

Oppgave 4

a) Vis at når V betegner volumet til en kule og S er overflaten til samme kule så gjelder:

$$(*) \qquad V = k_1 S^{3/2}$$

der k_1 er en konstant som er uavhengig av kulens radius. Bestem også k_1.

b) Siden en kuleformet celle bare kan ta opp næring gjennom overflaten og næringsopptaket i et fast tidsintervall er proporsjonalt med størrelsen av overflaten, og dessuten næringsbehovet er proporsjonalt med volumet, er det nødvendig at kulen deler seg, f.eks. i to kuler, for å kunne oppta nok næring.

Forklar hvorfor sammenhengen $(*)$ gir en matematisk begrunnelse for celle-deling.

c) Hvis en celle for en stund vokser uten å dele seg og uten å endre form (f.eks. forblir kuleformet), er det nærliggende å tro at vekstraten for volumet, $V'(t)$, er proporsjonal med overflaten. Begrunn denne påstand.

Forklar deretter hvorfor det er rimelig at vi har sammenhengen:

$$(**) \qquad V'(t) = k_2 V(t)^{\frac{2}{3}},$$

der k_2 er en positiv konstant.

d) Løs differensialligningen $(**)$ i c). (Gjennomfør regningen på dette punkt. Det er ikke nok å finne en formel i læreboken!) Finn til slutt den spesielle løsningen av $(**)$ når $k_2 = 3$ og $V(0) = 8$.

HØST 2000

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Per Hag
Telefon: 91743

MNFMA001, Brukerkurs i matematikk
Bokmål
Fredag 5. januar 2001
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok og utdelt kalkulator
Sensur: Fredag 26. januar 2001

Oppgave 1

Beregn arealet av det området i xy-planet som begrenses av kurvene

$$y = 8 - x^2 \quad \text{og} \quad y = 2x$$

Oppgave 2

Bestem λ slik at vektorene $\vec{a} = [1,2,3]$ og $\vec{b} = [\lambda, -1, 1]$ står vinkelrett på hverandre. Kan λ velges slik at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ blir parallelle? Begrunn svaret.

Oppgave 3

a) Bestem grenseverdien:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 4^x}{e^x - 6^x}$$

b) For hvilken verdi av konstanten k vil grenseverdien:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - k}{x^2}$$

eksistere? Begrunn svaret. Bestem grenseverdien for denne verdi av k.

Oppgave 4

a) Formelen

$$(*) \qquad \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

er kjent fra læreboken. Benytt $(*)$ til å utlede at:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

og at:

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

b) Benytt a) til å uttrykke $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ ved hjelp av $\cos 2x$.

c) Regn ut de bestemte integralene

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx.$$

Oppgave 5

a) Benytt Gauss-Jordan-eliminasjonen til å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 60 \\ x + 2y &= 45 \end{aligned}$$

b) Skisser de to rette linjene

$$\begin{aligned} 100x + 50y &= 3000 \\ 2x + 4y &= 90 \end{aligned}$$

i xy-planet. Bestem skjæringspunktets koordinater.

c) En gårdbruker har 50 dekar jord til disposisjon der han vil dyrke soyabønner og korn. Det koster ham 100 kr. pr. dekar å dyrke soyabønner og 50 kr. pr. dekar å dyrke korn. Han disponerer totalt 3000 kr. til dette formål.

Videre kreves det 2 dagsverk pr. dekar å dyrke soyabønner, mens det kreves 4 dagsverk pr. dekar å dyrke korn. Han har totalt 90 dagsverk til disposisjon.

La x betegne antall dekar som dyrkes med soyabønner og y antall dekar som dyrkes med korn. Angi grafisk det området i xy-planet som tilfredsstiller de rammebetingelsene som er angitt ovenfor.

d) Fortjenesten pr. dekar for soyabønner er 500 kr., mens fortjenesten pr. dekar for korn er 400 kr. Finn den kombinasjonen av verdier for x og y som gir størst fortjeneste under de gitte rammebetingelsene.

Oppgave 6

Løs annengradsligningen

$$z^2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}},$$

og tegn røttene i det komplekse plan. Skriv også røttene på formen $z = x + iy$.

Oppgave 7

a) I et oppdrettsanlegg befinner det seg 1000 laks. Dette antall antaes å være konstant. Vi lar $y = y(t)$ være antall individer som er angrepet av en bestemt sykdom med tiden t. Disse individene vil smitte friske individer i anlegget. Gi en kort begrunnelse for at det er rimelig å anta at $\frac{dy}{dt}$, smitteraten, tilfredsstiller differensialligningen:

(**) $$\frac{dy}{dt} = k(1000 - y)y,$$

der k er en positiv konstant.

b) Vis at det finnes konstanter A og B slik at følgende identitet holder:

$$\frac{1}{(1000 - y)y} \equiv \frac{A}{1000 - y} + \frac{B}{y}$$

Regn deretter ut det ubestemte integral:

$$\int \frac{dy}{(1000 - y)y}$$

c) Anta at konstanten k i (**) i punkt a) er lik 10^{-2} og at antall smittede individer ved tiden $t = 0$ er 100. Bestem $y = y(t)$ for et vilkårlig tidspunkt t.

d) Finn tiden det tar til halve laksebestanden i anlegget er smittet av denne sykdommen. (Tiden regnes i uker.)

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Per Roar Andenæs
Telefon: 9 17 03

MNFMA001, Brukerkurs i matematikk

Bokmål
Fredag 19. mai 2000
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Lærebok og utdelt kalkulator
Sensur: Fredag 9. juni 2000

Oppgave 1

Når en bakteriekultur utsettes for kraftig ultrafiolett stråling drepes bakteriene fordi strålingen ødelegger arvestoffet. Eksperimenter viser at antall bakterier avtar eksponentielt med lengden av strålingstiden. Vi finner ut at 75% av bakteriene lever etter 6 sekunders stråling. Hvor mange prosent er i live etter 30 sekunder? Hvor lenge må kulturen bestråles for å drepe 90% av bakteriene?

Oppgave 2

La funksjonen f være gitt ved formelen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

a) Hva er definisjonsmengden for denne funksjonen? Bestem eventuelle nullpunkter for f.

b) Regn ut $f'(x)$, og avgjør hvor f er voksende, hvor f er avtagende og finn eventuelle lokale ekstremalpunkter. Har f globalt/absolutt maksimum eller minimum? Begrunn svaret.

c) Regn ut $f''(x)$ og undersøk hvor grafen krummer oppover og hvor den krummer nedover. Har kurven noe vendepunkt?

d) Bestem alle asymptoter til f.

e) Skisser grafen til f ut fra punktene a) - d).

Oppgave 3

a) Regn ut de ubestemte integralene:

$$(i) \quad \int x e^x \, dx \qquad\qquad (ii) \quad \int (1+2t)^6 \, dt$$

b) Et kar fylles med vann med innstrømningshastighet:

$$V(t) = 3t^2\sqrt{1-t^3}, \quad 0 < t < 1,$$

angitt i liter pr. sekund. Finn det totale volum av vann som strømmer inn i perioden $0 \le t \le \frac{1}{2}$.

Oppgave 4

Finn alle komplekse løsninger av 2. gradsligningen:

$$z^2 - z + \frac{1}{2} = 0$$

Angi løsningene både på formen $a + ib$ og på formen $re^{i\theta}$.

Oppgave 5

a) Benytt Gauss-Jordan-eliminasjon til å løse ligningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

b) Bestem ligningen for planet gjennom punktene:

$$P_1 = (1,1,0), \;\; P_2 = (3,-2,3) \;\text{ og }\; P_3 = (2,2,1)$$

med minst mulig regning. Forklar framgangsmåten.

c) Hvordan kan man uten ytterligere regning konstatere at punktene P_1, P_2, P_3 i et punkt b) ikke kan ligge på en rett linje?

Oppgave 6

Italieneren Fibonacci tok i 1202 for seg følgende problem. Hvis man starter med et par nyfødte kaniner, vil disse etter 2 måneder produsere et nytt kaninpar, og deretter et nytt kaninpar hver måned. Dette gjelder også etterkommerne, og vi antar at ingen kaniner dør. Hvis vi ved a_n forstår antall kaninpar etter n måneder, er det lett å se at:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3$$

a) Angi a_4, a_5, a_6 og a_7 og forklar hvordan du kommer fram til disse tallene. Kontroller deretter at når $n = 1, 2, 3, 4, 5$ og 6, så gjelder:

$$(*) \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

b) Bevis at formelen $(*)$ i a) gjelder for alle $n \geq 1$.

c) Innfør betegnelsen

$$b_n = a_{n+1}/a_n,$$

og vis at

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}$$

når $n \geq 1$. Bestem c når man går ut fra som kjent at $\lim_{n\to\infty} b_{n-1} = \lim_{n\to\infty} b_n = c \neq 0$.

d) Vi deler et linjestykke i to deler slik at forholdet mellom lengden av hele linjestykket og lengden av den største delen er lik forholdet mellom lengden av den største delen og lengden av den minste delen. Bestem dette forholdet.

e) Det forholdet vi finner i d) kalles det gyldne snitt. Har det resultatet man kommer fram i punkt c) noe med det gyldne snitt å gjøre? Gjør rede for denne sammenhengen.