Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Alexander Lundervold (95931335)

Eksamen i Brukerkurs i matematikk B (MA0002)

Mandag 21. mai 2012
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 10. juni 2012

Hjelpemidler: Kalkulator og alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Hver av de fem oppgavene teller likt (20%).
Svarene skal begrunnes. Vis mellomregning eller henvis til teori.

Oppgave 1

a) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^2$$

med initialbetingelsen $y(0) = 1$.

Ifølge Newtons avkjølingslov vil temperaturen $y(t)$ til et objekt endre seg med en rate som er proposjonal med differansen mellom objektets temperatur og temperaturen T til omgivelsene. Det vil si at

$$\frac{dy}{dt} = k(y - T),$$

der k er en konstant.

b) Et rom holder en konstant temperatur på 20 grader. Ved tiden $t = 0$ plasseres en kopp kaffe med en temperatur på 90 grader i rommet. Etter 2 minutter er kaffens temperatur 80 grader. Hvor mange minutter tar det før temperaturen blir 65 grader?
(Hint: kaffens temperatur etter 2 minutter kan brukes til å bestemme konstanten k.)

Oppgave 2 La B og C være matrisene

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Beregn produktet BC.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene **til matrisen B**

c) La $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Regn ut $B^5\mathbf{x}$.

Oppgave 3 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Beregn determinanten $\det(A)$ til A.

b) Finn inversen A^{-1} til A.

c) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + z &= 1 \\ 3x + 2z &= 1. \end{aligned}$$

Oppgave 4 La

$$f(x, y) = xe^{y^2 - x}$$

a) Finn gradienten ∇f til f.

b) Regn ut den retningsderiverte til f i punktet $(4,2)$ i retning av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. I hvilken retning fra punktet $(4,2)$ vokser f raskest?

c) Finn alle de kritiske punktene til f, og avgjør om de er lokale maksimum, lokale mimimum eller sadelpunkt til f.

d) Finn de globale (eller *absolutte*) maksimum og minimum til f på området gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Oppgave 5

a) Finn løsningen på systemet av differensialligninger

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x - 4y$$

med initialbetingelsen $x(0) = 3$, $y(0) = 4$

b) Er ekvilibriumspunktet (også kalt *likevektspunktet*) $(0,0)$ til systemet stabilt eller ustabilt? Hva skjer med systemets løsninger når t går mot ∞?