Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under prøven:
Hilde Sande 41 62 53 22

Eksamen i MA0002 Brukerkurs B i matematikk

Torsdag 9. desember 2010
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur: 9. januar 2011

Hjelpemidler:
Kode A: Alle trykte og skrevne, samt kalkulator.

Alle deloppgaver teller like mye

Alle svar skal begrunnes!

Oppgave 1

a) Vis at $y = e^t - t - 1$ er en løsning av differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + t.$$

b) Michaelis-Menten-ligningen brukes i biokjemi til å beskrive virkningen av et enzym og kan skrives som

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{1+y}$$

for $y > 0$.

Finn den generelle løsningen på implisitt form for denne differensialligningen.

Oppgave 2 Vi skal se på matrisen $L = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0.75 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Finn egenverdiene til L og de tilhørende egenvektorene.

b) Begrunn at L er en inverterbar matrise og finn deretter den iverse matrisen L^{-1}.

Matrisen L er en Leslie-matrise for en bestand som består av to alderskategorier; ungdyr og voksne dyr. Ved $t = 1$ består bestanden av 80 ungdyr og 60 voksne.

c) Forklar hva de ulike tallene i matrisen L betyr.
Hvor mange ungdyr og voksne dyr bestod bestanden av ved $t = 0$?

d) Hva er bestanden ved $t = 10$?

Oppgave 3 Finn globale minimums- og maksimumspunkt for funksjonen

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 2x$$

på det triangulære området avgrenset av punktene $(0, -1)$, $(0, 1)$ og $(1, 0)$.

Oppgave 4 Løs ligningsystemet

$$\begin{aligned} x + 3z &= 6, \\ x + y + z &= 6, \\ 4x + y + 11z &= 25. \end{aligned}$$

Oppgave 5 Vi ser på følgende ikke-lineære system av differensialligninger

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= (x_1 - r)(x_2 - 1), \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= x_1 x_2 - 2r, \end{aligned}$$

der r er en konstant.

a) Vis at likevektspunktene til systemet er $(r, 2)$ og $(2r, 1)$.

b) Vi får vite at $r < 0$. Hva kan vi da si om stabiliteten til de to likevektspunktene?