Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Achenef Tesfahun (90 84 97 05)

EKSAMEN I MA0002 Brukerkurs B i matematikk

Onsdag 01. juni 2011
Tid: 15:00 – 19:00
Sensur 21. juni 2011

Hjelpemidler: A
Alle trykte og skrevne, samt kalkulator

Alle svar skal begrunnes!
Vis mellomregning eller henvis til teori.

Oppgave 1

a) (5%) Finn likevektspunktene til differensialligningen

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 2y - 3,$$

og avgjør om de er stabile eller ustabile.

Løsning: La $g(y) = y^2 - 2y - 3$. Vi får likevektspunktet/ene når $\frac{dy}{dt} = 0$, dvs. når $g(y) = y^2 - 2y - 3 = (y+1)(y-3) = 0$, som gir at $y = -1$ eller $y = 3$. Altså likevektspunktene er $y = -1$ og $y = 3$. Den deriverte av g er $g'(y) = 2y - 2$. Siden $g'(-1) = -4 < 0$ og $g'(3) = 4 > 0$ er $y = -1$ lokal stabilt og $y = 3$ ustabilt.

b) (10%) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} + 3t^2 y = t^2,$$

med initialbetingelse $y(0) = 1$.

Løsning: Vi kan skrive om ligningen som

$$\frac{dy}{dt} = t^2(1-3y) \Leftrightarrow \frac{dy}{1-3y} = t^2 dt$$

som er separabel. Integrere:

$$\int \frac{dy}{1-3y} = \int t^2 dt$$

$$\frac{\ln|1-3y|}{-3} = t^3/3 + C_1 \Leftrightarrow \ln|1-3y| = -t^3 - 3C_1,$$

som gir

$$1 - 3y = \pm e^{-3C_1} e^{-t^3} \Leftrightarrow 1 - 3y = C_2 e^{-t^3}$$

der $C_2 = \pm e^{-3C_1}$. Den generelle løsningen til differensiallikningen er derfor

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(1 - C_2 e^{-t^3}\right).$$

Setter inn for initialbetingelsen $y(0) = 1$:

$$1 = y(0) = \frac{1}{3}(1 - C_2 e^0) \Leftrightarrow 1 - C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = -2.$$

Løsningen av initialverdiproblemet er derfor

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(1 + 2e^{-t^3}\right).$$

N.B: Man kan også finne intergrerende faktor først og løse diff.ligningen (uten separering av ligningen).

Oppgave 2 Matrisen A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} d & 2 & d-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

der d er et reelt tall.

a) (5%) Finn determinanten til A uttrykt ved d.

Løsning:

$$det(A) = \begin{vmatrix} d & 2 & d-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (d-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= d(3-2) - 2(-3-1) + (d-1)(-2-1)$$
$$= d + 8 - 3d + 3 = -2d + 11.$$

b) (10%) Gi en begrunnelse for at A har en invers matrise når $d = 1$. Finn den inverse matrisen når $d = 1$. Vis utregningene.

Løsning: $det(A) = -2d + 11 = 0 \Leftrightarrow d = 11/2$. Den inverse matrisen til A eksisterer hvis og bare hvis $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow d \neq 11/2$. Spesielt finnes den inverse for $d = 1$. For $d = 1$ blir matrisen A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi bruker Gausseliminasjonen for å finne A^{-1}. Notasjon: $ar_i + r_j$ betyr at a ganger rad i legges til rad j uten å endre rad i. Og ar_i betyr at vi ganger rad i med tall a.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{r_1+r_2 \text{ og } -r_1+r_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}r_3+r_2}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-\frac{2}{3}r_2+r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 0 & 3 & 0 & 4/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}r_2 \text{ og } \frac{1}{3}r_3}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

Den høyre halvdelen av den siste matrisen er A^{-1}, dvs.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 4/9 & 1/3 & -1/9 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

c) (5%) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y \quad\quad &= 9 \\ -x + y \;\; + z \;\; &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 9. \end{aligned}$$

Løsning: La $\mathbf{x} = [x, y, z]'$ og $\mathbf{B} = [9, 3, 9]'$. Ligningsystemet kan derfor omskrives som $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$, der A er den samme matrisen som i punkt **b)**. Løsningen er derfor gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{B}$, siden A^{-1} eksisterer (se løsningsforslaget i punkt **b)**). Altså

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 4/9 & 1/3 & -1/9 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N.B.: Man kan også bruke utvidet matrise+Gauss elim. /tilbake-substitusjon for å løse ligningssystemet.

Oppgave 3 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (10%) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

Løsning:

<u>Egenverdiene:</u>

$$0 = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 3/4.$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2}.$$

Egenverdiene for A er $\lambda = -\frac{1}{2}$ og $\lambda = \frac{3}{2}$.

<u>Egenvektoren for $\lambda = -\frac{1}{2}$:</u>

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3/2u_1 \;+\; 3/2u_2 &= 0 \\ 1/2u_1 \;+\; 1/2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Det vil si at $u_2 = -u_1$. Velger for eks. $u_1 = 1$ og får egenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alle $c\mathbf{u}$ for $c \neq 0$ er også egenvektorer for $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Egenvektoren for $\lambda = \frac{3}{2}$:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -1/2v_1 & + & 3/2v_2 = 0 \\ 1/2v_1 & + & -3/2v_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si at $v_1 = 3v_2$. Velger for eks. $v_2 = 1$ og får egenvektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alle $c\mathbf{v}$ for $c \neq 0$ er også egenvektorer for $\lambda = \frac{3}{2}$.

Matrisen A er en Leslie-matrise for en fuglebestand som består av to alderskategorier: ungfugler og voksne fugler. Første gang vi teller så finner vi at det er 100 ungfugler og 100 voksne fugler.

b) (5%) Hva blir forholdet mellom antall ungfugler og antall voksne fugler i det lange løp? Hva er bestandens relative vekstrate i det lange løp?

Løsning: Forholdet mellom antall ungfugler og antall voksne fugler i det lange løp er gitt ved egenvektoren som hører til den største egenverdi, 3/2, altså $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dvs. forholdet er 3 : 1. Relative vekstrate for bestanden i det lange løp er gitt ved største egenverdi, 3/2.

Oppgave 4 Vi ser på funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y$.

a) (10%) Finn gradienten til f. Beregn den retningsderiverte av f i punktet $(1, 0)$ i retningen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Løsning: Gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 1 \\ 2y - 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vet at den retningsderiverte i retning $\mathbf{v}$, hvis $\mathbf{v}$ er en vektor av lengde 1, i punktet (a, b) er $\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v}$. Den oppgitte vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ har lengde $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Altså har $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ lengde 1. Tilsammen gir dette at den retningsderiverte av f i punktet $(1, 0)$ og i den gitte retningen er

$$\nabla f(1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + 1) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

b) (5%) Finn tangentplanet til f i punktet $(1, 0, 2)$.

Løsning: Vi vet at $f_x(1, 0) = 3$ og $f_y(1, 0) = -1$. Tangentplanet til f i punktet $(1, 0, 2)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} & z - 2 = f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) \\ \Leftrightarrow & z - 2 = 3(x-1) - y \\ \Leftrightarrow & -3x + y + z = -1. \end{aligned}$$

c) (5%) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f på sirkelskiven $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$.

Løsning: De kritiske punktene for f er der $\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 2y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dvs. $2x + 1 = 0$ og $2y - 1 = 0$, som gir bare ett kritisk punkt, $(-1/2, 1/2)$. Merk også at $(1/2)^2 + (-1/2)^2 = 1/2 < 4$, som viser at punktet ligger i sirkelskiven. Altså er $(-1/2, 1/2)$ et indre kritisk punkt.

Vi bruker andrederiverte-testen for å klassifisere det kritiske punktet. Første beregner vi

$$f_{xx} = 2, \ f_{yy} = 2, \ f_{xy} = 0 = f_{yx}.$$

Siden

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \ \text{ og } \ f_{xx} > 0 \quad \text{for alle } (x, y),$$

er $(-1/2, 1/2)$ et lokalt minimums punkt.

d) (10%) Finn absolutte maksimum og minimum for f på sirkelskiven $\{(x, y) : x^2+y^2 \leq 4\}$.

Løsning: Området vi ser på er avgrenset av en sirkel om origo med radius 2. Fra **c)** har vi ett indre kritisk punkt, $(-1/2, 1/2)$.

Deretter må vi undersøke randen til området. Disse er punktene (x, y) slik at $x^2+y^2 = 4$. Vi kan bruke tre måter for å finne mulige maks eller min på randen:

Lagrange's multiplikatormetode: Finn mulige maks eller min til

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y \quad \text{under bibetingelsen} \quad g(x, y) = 0,$$

der $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Vi løser

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 2y-1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

og

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

for (x, y). Altså løser vi

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 2\lambda x \\ 2y - 1 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Dette kan skrives som

$$\begin{aligned} 2x(\lambda - 1) &= 1 && (1) \\ 2y(\lambda - 1) &= -1 && (2) \\ x^2 + y^2 &= 4. && (3) \end{aligned}$$

Merk at hvis $\lambda = 1$ gir ligning (1) uttryket $0 = 1$, som er feil. Så er $\lambda \neq 1$. Av samme grunn er $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Siden $\lambda \neq 1$ kan vi nå dividere med $\lambda - 1$ i ligning (1) og (2), og får

$$2x = \frac{1}{\lambda - 1}, \quad 2y = -\frac{1}{\lambda - 1} \ \Rightarrow x = -y.$$

Vi setter inn $x = -y$ i ligning (3) og får $2y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 2$ som gir $y = \pm\sqrt{2}$. Når $y = -\sqrt{2}$ er $x = \sqrt{2}$ og når $y = \sqrt{2}$ er $x = -\sqrt{2}$, siden $x = -y$. Mulige maks og min punkter på randen er derfor $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Og kandidater for maks og min på hele definisjonsområdet blir $(-1/2, 1/2)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Funksjonsverdiene i disse punktene blir

$$f(-1/2, 1/2) = -1/2, \quad f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,17, \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83.$$

Vi finner at det absolutte minimumspunktet er $(-1/2, 1/2)$ og det absolutte maksimumspunktet er $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Redusere f til funksjon av en variabel når $x^2 + y^2 = 4$: Skriv $y^2 = 4 - x^2$. Dvs. $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ for $x \in [-2, 2]$. Vi ser på to tilfeller:

(i) $y = \sqrt{4 - x^2}$ for $x \in [-2, 2]$:

$$f(x, y) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = 4 + x - \sqrt{4 - x^2} = g(x), \quad x \in [-2, 2].$$

For $x \in (-2, 2)$:

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -1.$$

Nevneren er forskjellig fra 0 siden $x \in (-2, 2)$. Dermed

$$x = -\sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4 - x^2, \quad x < 0.$$

Altså $2x^2 = 4,\ x < 0 \Leftrightarrow x^2 = 2,\ x < 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$. Og setter vi inn $x = -\sqrt{2}$ i $y = \sqrt{4 - x^2}$ får vi $y = \sqrt{2}$.

Endepunktene er $x = \pm 2$ som gir $y = 0$. Derfor er $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\pm 2, 0)$ kandidater for maks eller min.

(ii) $y = -\sqrt{4 - x^2}$ for $x \in [-2, 2]$:

$$f(x, y) = f(x, -\sqrt{4 - x^2}) = 4 + x + \sqrt{4 - x^2} = g(x), \quad x \in [-2, 2].$$

For $x \in (-2, 2)$:

$$g'(x) = 1 + \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 1.$$

Igjen er nevneren forskjellig fra 0 siden $x \in (-2, 2)$. Dermed

$$x = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4 - x^2, \quad x > 0.$$

Altså $2x^2 = 4, \ x > 0 \Leftrightarrow x^2 = 2, \ x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Og setter vi inn $x = \sqrt{2}$ i $y = -\sqrt{4 - x^2}$ får vi $y = -\sqrt{2}$. Endepunktene $x = \pm 2$ gir $y = 0$ som er de samme som i punkt **(i)**. Derfor: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ er andre kandidat for maks eller min.

Tilsammen blir kandidatene for maks eller min $(-1/2, 1/2)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Funksjonsverdiene i $(\pm 2, 0)$ blir $f(-2, 0) = 2, \ \ f(2, 0) = 6$. Derfor er det absolutte minimumspunktet $(-1/2, 1/2)$, hvor $f(-1/2, 1/2) = -1/2$, og det absolutte maksimumspunktet $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, hvor $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \approx 6,83$.

Parameterfremstilling for sirkelen $x^2 + y^2 = 4$: Vi kan beskrive disse punktene ved å bruke parameterfremstilling for en sirkel av radius 2:

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Altså $f(x, y) = f(2\sin t, 2\cos t) = 4 + 2\sin t - 2\cos t = g(t)$, der g nå er en funksjon av en variabel $t \in [0, 2\pi]$. Kritiske punkt for g er der $g'(t) = 2\cos t + 2\sin t = 0 \Leftrightarrow \tan t = -1 \Leftrightarrow t = 3\pi/4$ or $t = 7\pi/4$. Endepunktene $t = 0$ og $t = 2\pi$ er også mulige ekstremalpunkter for g. Merk nå at $t = 0, 3\pi/4, 7\pi/4, 2\pi$ henholdvis tilsvarer punktene

$$(x, y) = (2, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (2, 0).$$

Tilsammen blir kandidatene for maks eller min $(-1/2, 1/2)$, $(2, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Som før finner vi at det absolutte minimumspunktet er $(-1/2, 1/2)$ og det absolutte maksimumspunktet er $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Oppgave 5

a) (10%) Finn den generelle løsningen av det homogene differensialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - 2y$$

Løsning: La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Systemet kan da omskrives som

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}.$$

Egenverdiene til A:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Dvs. egenverdiene til A er $\lambda = -1$ og $\lambda = -1$.

Egenvektoren for $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcr} 3u_1 & + & 3u_2 = 0 \\ -u_1 & - & u_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si at $u_2 = -u_1$. Velger for eks. $u_1 = 1$ og får egenvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Egenvektoren for $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcr} v_1 & + & 3v_2 = 0 \\ -v_1 & - & 3v_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si at $v_1 = -3v_2$. Velger for eks. $v_2 = -1$ og får egenvektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Den generelle løsningen til det homogene systemet er derfor

$$\mathbf{x(t)} = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

eller

$$x(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{t}, \quad y(t) = -C_1 e^{-t} - C_2 e^{t}.$$

b) (5%) Finn likevektpunktet til det inhomogene systemet

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y - 2$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - 2y + 1$$

Løsning: La $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Det inhomogene systemet kan da skrives som

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

der A er som i punkt **a)**. Likevektspunktet til systemet er $\hat{\mathbf{x}}$ der $A\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow A\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{b}$. Altså $\hat{\mathbf{x}} = -A^{-1}\mathbf{b}$ hvis A^{-1} eksisterer. For å beregne A^{-1} bruker vi den inverse formelen til 2x2 matrise, siden $det(A) = -1 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = A.$$

Likevektspunktet er derfor

$$\hat{\mathbf{x}} = -A^{-1}\mathbf{b} = -\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) (5%) Løs differensialligningene i punkt **b)** under initialbetingelsene $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

Løsning: Den generelle løsningen til det inhomogene systemet i **b)** er summen av den generelle løsningen til det homogene systemet i **a)** og likevektspunktet i **b)**. Altså

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller

$$x(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{t} + 1,$$
$$y(t) = -C_1 e^{-t} - C_2 e^{t}.$$

Ved å bruke initialbetingelsene $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ får vi

$$1 = x(0) = C_1 + 3C_2 + 1,$$
$$-1 = y(0) = -C_1 - C_2,$$

som gir $C_1 = 3/2$ og $C_2 = -1/2$.

Løsningen til det inhomogene systemet i punkt **b)** under initialbetingelsene $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ er derfor

$$x(t) = 3/2e^{-t} - 3/2e^{t} + 1,$$
$$y(t) = -3/2e^{-t} + 1/2e^{t}.$$