Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Achenef Tesfahun (90 84 97 05)

EKSAMEN I MA0002 Brukerkurs B i matematikk

Lørdag 03.12.2011
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 14.12.2011

Hjelpemidler: A
Alle trykte og skrevne, samt kalkulator

Det står 4 hovedoppgaver.
Alle deloppgaver teller like mye.
Alle svar skal begrunnes!
Vis mellomregning eller henvis til teori!

Oppgave 1

a) Vis at $y(t) = (t^4 + 1)e^{-\cos t}$ løser initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} - (\sin t)y = 4t^3 e^{-\cos t}, \qquad y(0) = \frac{1}{e}.$$

Løsning: Vi deriverer $y(t) = (t^4 + 1)e^{-\cos t}$ m.h.p t for å sjekke om det er løsningen. Ved å bruke produkt og kjerne regel

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 4t^3 e^{-\cos t} + (t^4 + 1)e^{-\cos t} \sin t \\ &= 4t^3 e^{-\cos t} + y \sin t.\end{aligned}$$

Altså
$$\frac{dy}{dt} - (\sin t)y = 4t^3 e^{-cost}.$$
I tillegg har vi
$$y(0) = e^{-\cos 0} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$
Konklusjon: $y(t) = (t^4+1)e^{-\cos t}$ løser initialverdiproblemet.

b) En pasient får en medisin intravenøst med en konstant dosering på 20 milliliter per time. Medisinen skilles ut av kroppen med en rate på 10% per time. Hvor mye medisin er det i kroppen etter t timer hvis pasienten var medisinfri da behandlingen startet?

Løsning: La $y(t)$ være medisinmengden i kroppen etter t timer. Den deriverte $\frac{dy}{dt}$ måler endringen i medisinmengde per tidsenhet. Den endringen er differensen mellom tilførselen (20 milliliter per time) og utskillingen ($0,1y(t)$ milliliter per time). Det betyr at
$$\frac{dy}{dt} = 20 - 0,1y.$$
Behandlingen startet ved tiden $t = 0$. Da var pasienten medisinfri, dvs. at $y(0) = 0$. Vi må løse for $y(t)$ ut fra initialverdiproblemet
$$\frac{dy}{dt} = 20 - 0,1y, \quad y(0) = 0.$$
Likningen omformes
$$\frac{dy}{20 - 0,1y} = dt \quad (\text{ separabel diff.lign}).$$
Integrere:
$$\int \frac{dy}{20 - 0,1y} = \int dt$$
$$\frac{1}{-0,1} \ln|20 - 0,1y| = t + C_1$$
$$\Leftrightarrow \ln|20 - 0,1y| = -0,1t - 0,1C_1,$$
som gir
$$20 - 0,1y = \pm e^{-0,1C_1} e^{-0,1t}$$
$$\Leftrightarrow 20 - 0,1y = C_2 e^{-0,1t}$$
der $C_2 = \pm e^{-0,1C_1}$. Altså
$$y(t) = 200 - 10C_2 e^{-0,01t}$$

er generelle løsninger til differensiallikningen. Setter inn for initialbetingelsen $y(0) = 0$:

$$0 = y(0) = 200 - 10C_2 e^{-0,1\cdot 0} = 200 - 10C_2 \Rightarrow C_2 = 20.$$

Derfor

$$y(t) = 200 - 200e^{-0,1t} \quad \text{(medisinmengden i kroppen etter } t \text{ timer).}$$

Oppgave 2 Vi er gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer.

Løsning:

Egenverdiene:

$$0 = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda + 2)(\lambda - 8).$$

Egenverdiene for A er $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 8$.

Egenvektorene for $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 4u_1 & + & 6u_2 = 0 \\ 4u_1 & + & 6u_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si at $6u_2 = -4u_1$. Velg foreks. $u_1 = 3$ og får egenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Alle $c\mathbf{u}$ for $c \neq 0$ er også egenvektorer for $\lambda_1 = -2$.

Egenvektorene for $\lambda_2 = 8$:

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -6v_1 & + & 6v_2 = 0 \\ 4v_1 & - & 6v_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si at $v_1 = 3v_2$. Velg foreks. $v_2 = 1$ og får egenvektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alle $c\mathbf{v}$ for $c \neq 0$ er også egenvektorer for $\lambda_2 = 8$.

b) Beregn $A^{20}\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$.

Løsning: Først bestemm a og b slik at

$$\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned}3a+b&=4\\-2a+b&=-2\end{aligned}$$

Altså, $a = 6/5$ og $b = 2/5$, og derfor

$$\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} = \frac{6}{5}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Derfor

$$A^{20}\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} = \frac{6}{5}(-2)^{20}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} + \frac{2}{5}8^{20}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix}9\cdot 2^{20} & 8^{20}\\-3\cdot 2^{21} & 8^{20}\end{bmatrix}.$$

c) Finn løsningen til differensialligningssystemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad \text{der } \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},$$

som oppfyller initialbetingelsen

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}.$$

Er likevektspunktet $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ til systemet stabilt eller ustabilt?

Løsning: Fra (**a**) har vi følgende:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix},\\ \lambda_2 &= 8, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Siden A har en negativ og en postitiv egenverdi, er likevektspunktet $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ustabilt.

Den generelle løsningen til systemet blir

$$\mathbf{x(t)} = C_1e^{-2t}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} + C_2e^{8t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

Setter inn for initialbetingelsen,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(\mathbf{0}) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3C_1 + C_2 \\ -2C_1 + C_2 \end{bmatrix}.$$

Altså $3C_1 + C_2 = 4$ og $-2C_1 + C_2 = -2$, som gir $C_1 = 6/5$ og $C_2 = 2/5$. Derfor blir den spesielle løsningen til systemet

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \frac{6}{5}e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}e^{8t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

N.B.: Vi kan også lese C_1 og C_2 direkt fra punkt **b**) (løsn. der, dvs. $C_1 = a, C_2 = b$).

Oppgave 3 Vi ser på funksjonen $f(x, y) = e^{-y} \cos x$.

a) Hva er den retningsderiverte til f i punktet $(\pi, 0)$ langs vektoren $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. I hvilken retning er den retningsderiverte til f størst mulig i $(\pi, 0)$.

Løsning: Gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e^{-y} \sin x \\ e^{-y} \cos x \end{bmatrix}.$$

Altså $\nabla f(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Enhetsvektoren langs $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ er

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Den retningsderiverte til f i punktet $(\pi, 0)$ langs vektoren $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ er derfor

$$D_{\mathbf{u}} f(\pi, 0) = \nabla f(\pi, 0) \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = -\frac{3}{5}.$$

Den retningsderiverte er størst i retningen av gradienten til f i punktet $(\pi, 0)$, dvs., i retning $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (som er positiv y-akse).

b) Finn den linære approksimasjonen rundt (0,0) til f, og bruk den til å finne en tilnærmet verdi for $f(-0, 1, 0, 2)$. (Vis beregningen).

Løsning: Den linære approksimasjonen rundt (0,0) til f er gitt ved fomelen

$$L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0).$$

Siden $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 0$ og $f_y(0,0) = -1$ er den linære approksimasjonen rundt (0,0) til f

$$L(x,y) = 1 - y.$$

Vi nå bruker L for å finne tilnærme verdi for $f(-0,1,0,2)$:

$$L(-0,1,0,2) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

c) Beregn $\frac{dy}{dx}$ når $f(x,y) = 0$.

Løsning: Ved å bruke implisitt derivasjon formel

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{-e^{-y}\sin x}{-e^{-y}\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Oppgave 4 Vi ser på funksjonen $f(x,y) = xy(15 - 5y - 3x)$.

a) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f.

Løsning: $f(x,y) = 15xy - 5xy^2 - 3x^2y)$. Kritiske punktene for f er der

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15y - 5y^2 - 6xy \\ 15x - 10xy - 3x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dvs. $15y - 5y^2 - 6xy = 0$ og $15x - 10xy - 3x^2 = 0$ som beytr at $y(15 - 5y - 6x) = 0$ og $x(15 - 10y - 3x) = 0$. Altså

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\text{eller} \quad 3x + 10y = 15, \quad \text{og} \\ y = 0 \quad &\text{eller} \quad 6x + 5y = 15. \end{aligned}$$

Disse gir fire kritiske punkter:

$$(0,0),\ (0,3),\ (5,0),\ \text{og}\ (5/3,1).$$

Vi bruker andrederiverte test for å klassifisere det kritiske punktet. La $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Vi har

$$f_{xx} = -6y,\ f_{yy} = -10x,\ f_{xy} = 15 - 10y - 6x = f_{yx}.$$

Nå beregner vi disse i punktene

$$\begin{aligned}
(0,0): &\quad f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 15, \quad D = -225, \\
(0,3): &\quad f_{xx} = -18, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = -15, \quad D = -225, \\
(5,0): &\quad f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = -50, \quad f_{xy} = -15, \quad D = -225, \\
(5/3,1): &\quad f_{xx} = -6, \quad f_{yy} = -50/3, \quad f_{xy} = -5, \quad D = 75.
\end{aligned}$$

Konklusjon: $(0,0)$, $(0,3)$ og $(5,0)$ er saddelpunkter mens $(5/3,1)$ er lokalmaksimumspunkt.

b) Finn absolutte maksimumspunkt for f på trekanten som er avgrenset av $3x + 5y = 15$, x-aksen og y-aksen.

Løsning:

Trekanten er avgrenset av linjer $3x + 5y = 15$, $x = 0$ (x-akse) og $y = 0$ (y-akse). Vi har bare ett indre kritisk punkt (se (**a**)): $(x, y) = (5/3, 1)$, der $f(5/3, 1) = 25/3$.

Merk at $f(x, y) = 0$ når (x, y) ligger på randen, dvs. når $x = 0$ eller $y = 0$ eller $3x+5y = 15$.

Konklusjon: Den absolutte maksimumpunkten for f på trekanten er derfor $(5/3, 1)$ som har verdien $25/3$.