MA0002: Øving 3 (2001V)

Oppgave 2: $x\frac{dy}{dx} + 3x^3y - x^3 = 0$; der $y=1$ når $x=1$

Omskriv likningen på formen $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \underbrace{3x^2}_{P(x)}y = \underbrace{x^2}_{Q(x)}$$

(vi dividerte likningen med x)

① $A(x) = \int P(x)\,dx = x^3 \Rightarrow$ Integrerende faktoren er e^{x^3}.

② gang likningen med e^{x^3}:

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + e^{x^3}3x^2y = e^{x^3}x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{x^3}y\right)' = e^{x^3}x^2 \quad \text{fordi} \quad \left(e^{x^3}y\right)' = e^{x^3}\frac{dy}{dx} + e^{x^3}3x^2y$$

③ Integrere og løse for y

$$e^{x^3}y = \int e^{x^3}x^2\,dx \underset{\frac{du}{3}=x^2dx}{\overset{u=x^3}{=}} \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

$$\Rightarrow y = e^{-x^3}\left(\frac{1}{3}e^{x^3} + C\right) = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$$

④ Bestem C:

$y = 1$ når $x = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + Ce^{-1} \Rightarrow C = \frac{2}{3}e$$

Altså $\boxed{y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-x^3+1}}$ er løsningen!

MA0002: Øving 3 (2011V)

2006V; Oppgave 10: $\frac{dy}{dt} + y + 4e^{-3t} = 0$, der $y = 3$ når $t = 0$

- Omskrive Likningen på formen $\frac{dy}{dt} + p(t)\,y = Q(t)$:

$$\frac{dy}{dt} + \underbrace{1}_{p(t)} \cdot y = \underbrace{-4e^{-3t}}_{Q(t)} \Rightarrow p(t) = 1, \quad Q(t) = -4e^{-3t}$$

① $A(t) = \int p(t)\,dt = \int dt = t \Rightarrow e^{t}$ er integrerende faktoren.

② gang Likningen med e^{t}:

$$e^{t}\frac{dy}{dt} + e^{t}y = -4e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^{t}y)' = -4e^{-2t} \qquad \text{fordi } (e^{t}y)' = e^{t}\frac{dy}{dt} + e^{t}y$$

③ Integrere m.h.p t og løse for y :

$$e^{t}y = \int -4e^{-2t}\,dt = -4\int e^{-2t}\,dt$$

$$= -4 \cdot \frac{-1}{2} e^{-2t} + C$$

$$= 2e^{-2t} + C$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-t}(2e^{-2t} + C) = 2e^{-3t} + Ce^{-t}$$

④ Bestem C:

$y = 3$ når $t = 0 \Rightarrow 3 = 2e^{-3 \cdot 0} + Ce^{-0}$

$= 2 + C \Rightarrow C = 1$

Altså $\boxed{y = 2e^{-3t} + e^{-t}}$ er Løsningen

(*) Konsentrasjonen etter 1 ms?

vi setter $t = 1$, og får $y = 2e^{-3 \cdot 1} + e^{-1} = 2e^{-3} + e^{-1}$

$\approx 0{,}47\,M$

MA0002: Øving 3 (2011V)

9.1.17: $y + x = 3$ Standard form: $x + y = 3$

$z - y = -1$ $-y + z = -1$

$x + z = 2$ $x + z = 2$

• utvida matrise ("argumented matrix"):
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

• Gauss-eliminasjon:

① $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \cdot -1$ ② $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \cdot -1$

③ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Skriv likningssystemet:

(I) $x + y = 3$

(II) $-y + z = -1$

(III) $0z = 0$ ← stemmer for alle z.

Likningen på rad 3 er sant for alle z:

Vi innfører en parameter $t \in \mathbb{R}$, og ~~[illegible]~~ setter $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Da
• Fra (II): $-y + t = -1 \Rightarrow y = t + 1$

• Fra (I): $x + t + 1 = 3 \Rightarrow x = -t + 2$

Altså
$$(x, y, z) = (2 - t,\ 1 + t,\ t) \quad \text{der } t \in \mathbb{R}$$
er løsningene til likningssystemet

Dvs. likningssystemet har uendelig mange løsninger.

MA 0002, øving 3 (2011v)

2006v, oppgave 4:

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -9 \\ 3x + 2y + 5z &= -3 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

· utvidet matrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -9 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

· gjennomføre Gauss-eliminasjon:

1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -9 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot -3$

2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -1 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot -1/11$

3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 12/11 & -24/11 \end{array}\right] \cdot 11/12$

4) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \cdot 1 \quad \cdot -2$

5) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \cdot 1/11$

6) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \cdot 3$

7) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \quad x = 1, \; y = 2, \; z = -2$

En løsning:

$$\underline{\underline{(x, y, z) = (1, 2, -2)}}$$