



Faglig kontakt under eksamen:
Achenef Tesfahun (90 84 97 05)

EKSAMEN I MA0002 Brukerkurs B i matematikk

Onsdag 01. juni 2011

Tid: 15:00 – 19:00

Sensur 21. juni 2011

Hjelpemidler: A
Alle trykte og skrevne, samt kalkulator

Alle svar skal begrunnes!
Vis mellomregning eller henvis til teori.

Oppgave 1

- a) (5%) Finn likevektspunktene til differensialligningen

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 2y - 3,$$

og avgjør om de er stabile eller ustabile.

Løsning: La $g(y) = y^2 - 2y - 3$. Vi får likevektspunktet/ene når $\frac{dy}{dt} = 0$, dvs. når $g(y) = y^2 - 2y - 3 = (y + 1)(y - 3) = 0$, som gir at $y = -1$ eller $y = 3$. Altså likevektspunktene er $y = -1$ og $y = 3$. Den deriverte av g er $g'(y) = 2y - 2$. Siden $g'(-1) = -4 < 0$ og $g'(3) = 4 > 0$ er $y = -1$ lokal stabilt og $y = 3$ ustabilt.

b) (10%) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dt} + 3t^2y = t^2,$$

med initialbetingelse $y(0) = 1$.

Løsning: Vi kan omskrive likningen som

$$\frac{dy}{dt} = t^2(1 - 3y) \Leftrightarrow \frac{dy}{1 - 3y} = t^2 dt$$

som er separabel. Integrere:

$$\int \frac{dy}{1 - 3y} = \int t^2 dt$$

$$\frac{\ln |1 - 3y|}{-3} = t^3/3 + C_1 \Leftrightarrow \ln |1 - 3y| = -t^3 - 3C_1,$$

som gir

$$1 - 3y = \pm e^{-3C_1} e^{-t^3} \Leftrightarrow 1 - 3y = C_2 e^{-t^3}$$

der $C_2 = \pm e^{-3C_1}$. Generelle løsningen til differensiallikningen er derfor

$$y(t) = \frac{1}{3} \left(1 - C_2 e^{-t^3} \right).$$

Setter inn for initialbetingelsen $y(0) = 1$:

$$1 = y(0) = \frac{1}{3}(1 - C_2 e^0) \Leftrightarrow 1 - C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = -2.$$

Løsningen av initialverdiproblemet er derfor

$$y(t) = \frac{1}{3} \left(1 + 2e^{-t^3} \right).$$

N.B: Man kan også finne integrerende faktor først og løse diff.ligningen (uten separering av ligningen).

Oppgave 2 Matrisen A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} d & 2 & d-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

der d er et reelt tall.

a) (5%) Finn determinanten til A uttrykt ved d .

Løsning:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} d & 2 & d-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (d-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= d(3-2) - 2(-3-1) + (d-1)(-2-1) \\ &= d + 8 - 3d + 3 = -2d + 11. \end{aligned}$$

b) (10%) Gi en begrunnelse for at A har en invers matrise når $d = 1$. Finn den inverse matrisen når $d = 1$. Vis utregningene.

Løsning: $\det(A) = -2d + 11 = 0 \Leftrightarrow d = 11/2$. Invers matrise til A eksisterer hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow d \neq 11/2$. Spesielt det finnes invers for $d = 1$. For $d = 1$ blir matrisen A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi burker Gausseliminasjonen for å finne A^{-1} . Notasjon: $ar_i + r_j$ betyr at a ganger rad i legges til rad j uten å endre rad i . Og ar_i betyr at vi ganger rad i med tall a .

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{r_1+r_2 \text{ og } -r_1+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_3+r_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{-\frac{2}{3}r_2+r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 0 & 3 & 0 & 4/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2 \text{ og } \frac{1}{3}r_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Den høyre halvdel av den siste matrisen er A^{-1} , dvs.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 4/9 & 1/3 & -1/9 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

c) (5%) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y &= 9 \\ -x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 9.\end{aligned}$$

Løsning: La $\mathbf{x} = [x, y, z]'$ og $\mathbf{B} = [9, 3, 9]'$. Ligningssystemet kan derfor omskrives som $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$, der A er den samme matrisen som i punkt b). Løsningen er derfor gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{B}$, siden A^{-1} eksisterer (se løsningsforslaget i punkt b)). Altså

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & -2/3 & 2/9 \\ 4/9 & 1/3 & -1/9 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N.B.: Man kan også bruke utvide matrise+Gauss elim. /tilbake substitusjon for å løse ligningssystemet.

Oppgave 3 Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (10%) Finn egenverdiene og egenvektorene til A .

Løsning:

Egenverdiene:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 3/4.$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2}.$$

Egenverdiene for A er $\lambda = -\frac{1}{2}$ og $\lambda = \frac{3}{2}$.

Egenvektorene for $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} 3/2u_1 + 3/2u_2 &= 0 \\ 1/2u_1 + 1/2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Det vil si at $u_2 = -u_1$. Velg foreks. $u_1 = 1$ og får egenvektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alle $c\mathbf{u}$ for $c \neq 0$ er også egenvektorer for $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Egenvektorene for $\lambda = \frac{3}{2}$:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -1/2v_1 + 3/2v_2 = 0 \\ 1/2v_1 - 3/2v_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si at $v_1 = 3v_2$. Velg foreks. $v_2 = 1$ og får egenvektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alle $c\mathbf{v}$ for $c \neq 0$ er også egenvektorer for $\lambda = \frac{3}{2}$.

Matrisen A er en Leslie-matrise for en fuglebestand som består av to alderskategorier: ungfugler og voksne fugler. Første gang vi teller så finner vi at det er 100 ungfugler og 100 voksne fugler.

- b) (5%) Hva blir forholdet mellom antall ungfugler og antall voksne fugler i det lange løp? Hva er bestandens relative vekstrate i det lange løp?

Løsning: Forholdet mellom antall ungfugler og antall voksne fugler i det lange løp er gitt ved egenvektoren som hører til den største egenverdi, $3/2$, altså $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dvs. forholdet er $3 : 1$. Relative vekstrate for bestanden i det lange løp er gitt ved største egenverdi, $3/2$.

Oppgave 4 Vi ser på funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y$.

- a) (10%) Finn gradienten til f . Beregn den retningsderiverte av f i punktet $(1, 0)$ i retningen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Løsning: Gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 1 \\ 2y - 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vet at den retningsderiverte i retning \mathbf{v} , hvis \mathbf{v} er en vektor av lengde 1, i punktet (a, b) er $\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v}$. Den oppgitte vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ har lengde $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Altså har $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ lengd 1. Tilsammen gir dette at den retningsderiverte av f i punktet $(1, 0)$ og den gitte retningen er

$$\nabla f(1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + 1) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

b) (5%) Finn tangentplanet til f i punktet $(1, 0, 2)$.

Løsning: Vi vet at $f_x(1, 0) = 3$ og $f_y(1, 0) = -1$. Tangentplanet til f i punktet $(1, 0, 2)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} z - 2 &= f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ \Leftrightarrow z - 2 &= 3(x - 1) - y \\ \Leftrightarrow -3x + y + z &= -1. \end{aligned}$$

c) (5%) Finn og klassifiser de kritiske punktene til f på sirkelskiven $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$.

Løsning: Kritiske punktene for f er der $\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 1 \\ 2y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dvs. $2x + 1 = 0$ og $2y - 1 = 0$, som gir bare ett kritisk punkt, $(-1/2, 1/2)$. Merk også at $(1/2)^2 + (-1/2)^2 = 1/2 < 4$, som viser at punktet ligger i sirkelskiven. Altså er $(-1/2, 1/2)$ et indre kritisk punkt.

Vi bruker andrederiverte test for å klassifisere det kritiske punktet. Første beregner vi

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0 = f_{yx}.$$

Siden

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \quad \text{og} \quad f_{xx} > 0 \quad \text{for alle } (x, y),$$

er $(-1/2, 1/2)$ et lokale minimum kritisk punkt.

d) (10%) Finn absolutte maksimum og minimum for f på sirkelskiven $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Løsning: Området vi ser på er en avgrenset av en sirkel om origo med radius 2. Fra c) har vi ett indre kritisk punkt, $(-1/2, 1/2)$.

Neste må vi undersøke randen til området. Disse er punktene (x, y) slik at $x^2 + y^2 = 4$. Vi kan bruke tre måter for å finne mulige maks eller min på randen:

Lagrange's multiplikator metode: Finn mulige maks eller min til

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y \quad \text{under bibetingelse} \quad g(x, y) = 0,$$

der $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Vi løser for (x, y) slik at

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 1 \\ 2y - 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

slik at $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Altså vi løser

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 2\lambda x \\ 2y - 1 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Dette omskrives som

$$2x(\lambda - 1) = 1 \quad (1)$$

$$2y(\lambda - 1) = -1 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (3)$$

Merk at hvis $\lambda = 1$ gir ligning (1) setningen $0 = 1$ som er feil. Så er $\lambda \neq 1$. På samme grunn er $x \neq 0$ og $y \neq 0$. Siden $\lambda \neq 1$ kan vi nå dividere med $\lambda - 1$ i ligninger (1) og (2), og får

$$2x = \frac{1}{\lambda - 1}, \quad 2y = -\frac{1}{\lambda - 1} \Rightarrow x = -y.$$

Vi setter inn $x = -y$ i ligning (3) og får $2y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 2$ som gir $y = \pm\sqrt{2}$. Når $y = -\sqrt{2}$ er $x = \sqrt{2}$ og når $y = \sqrt{2}$ er $x = -\sqrt{2}$, siden $x = -y$. Mulige maks og min punkter på randen er derfor $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Og kandidater for maks og min på hele definisjonsområdet blir $(-1/2, 1/2)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Funksjonsverdiene i disse punktene blir

$$f(-1/2, 1/2) = -1/2, \quad f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,17, \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83.$$

Vi finner så at absolutte minimum punkt er $(-1/2, 1/2)$, og absolutte maksimum punkt er $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Redusere f til funksjon av en variabel når $x^2 + y^2 = 4$: Skriv $y^2 = 4 - x^2$. Dvs. $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ for $x \in [-2, 2]$. Vi ser på to tilfeller:

(i) $y = \sqrt{4 - x^2}$ for $x \in [-2, 2]$:

$$f(x, y) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = 4 + x - \sqrt{4 - x^2} = g(x), \quad x \in [-2, 2].$$

For $x \in (-2, 2)$:

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -1.$$

Nevnen er forskjelle fra 0 siden $x \in (-2, 2)$. Dermed

$$x = -\sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4 - x^2, \quad x < 0.$$

Altså $2x^2 = 4$, $x < 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$, $x < 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$. Og setter vi inn $x = -\sqrt{2}$ i $y = \sqrt{4 - x^2}$ får vi $y = \sqrt{2}$.

Endepunktene er $x = \pm 2$ som gir $y = 0$. Derfor: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\pm 2, 0)$ er kandidater for maks eller min.

(ii) $y = -\sqrt{4 - x^2}$ for $x \in [-2, 2]$:

$$f(x, y) = f(x, -\sqrt{4 - x^2}) = 4 + x + \sqrt{4 - x^2} = g(x), \quad x \in [-2, 2].$$

For $x \in (-2, 2)$:

$$g'(x) = 1 + \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 1.$$

Igien er nevnen forskjelle fra 0 siden $x \in (-2, 2)$. Dermed

$$x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4-x^2, \quad x > 0.$$

Altså $2x^2 = 4$, $x > 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$, $x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Og setter vi inn $x = \sqrt{2}$ i $y = -\sqrt{4-x^2}$ får vi $y = -\sqrt{2}$. Endepunktene er $x = \pm 2$ gir $y = 0$ som er samme som i punkt (i). Derfor: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ er andre kandidat for maks eller min.

Tilsammen blir kandidatene for maks eller min $(-1/2, 1/2)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Funksjon verdiene i $(\pm 2, 0)$ blir $f(-2, 0) = 2$, $f(2, 0) = 6$. Derfor absolutte minimum punkt er $(-1/2, 1/2)$, hvor $f(-1/2, 1/2) = -1/2$, og absolutte maksimum punkt er $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, hvor $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \approx 6,83$.

Parameterframstilling for sirkelen $x^2 + y^2 = 4$: Vi kan beskrive disse punktene ved å bruke parameterframstilling for en sirkel av radius 2:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Altså $f(x, y) = f(2 \sin t, 2 \cos t) = 4 + 2 \sin t - 2 \cos t = g(t)$, der g er nå funksjon av en variabel $t \in [0, 2\pi]$. Kritiske punktene for g er der $g'(t) = 2 \cos t + 2 \sin t = 0 \Leftrightarrow \tan t = -1 \Leftrightarrow t = 3\pi/4$ or $t = 7\pi/4$. Endepunktene $t = 0$ og $t = 2\pi$ er også mulige ekstremalpunkter for g . Merk nå at $t = 0, 3\pi/4, 7\pi/4, 2\pi$ tilsvarer til punktene

$$(x, y) = (2, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (2, 0)$$

henholdvis.

Tilsammen blir kandidatene for maks eller min $(-1/2, 1/2)$, $(2, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Som før finner vi at absolutte minimum punkt er $(-1/2, 1/2)$ og absolutte maksimum punkt er $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Oppgave 5

a) (10%) Finn den generelle løsningen av det homogene differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y \end{aligned}$$

Løsning: La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Systemet kan da omskrives

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}.$$

Eigenverdiene til A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Dvs. eigenverdiene til A er $\lambda = -1$ og $\lambda = 1$.

Egenvektorene for $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3u_1 + 3u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si ta $u_2 = -u_1$. Velg foreks. $u_1 = 1$ og får egenvektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Egenvektorene for $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} v_1 + 3v_2 = 0 \\ -v_1 - 3v_2 = 0 \end{array}$$

Det vil si at $v_1 = -3v_2$. Velg foreks. $v_2 = -1$ og får egenvektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Generelle løsningen til det homogene systemet er derfor

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

eller

$$x(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^t, \quad y(t) = -C_1 e^{-t} - C_2 e^t.$$

b) (5%) Finn likevektspunktet til det inhomogene systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y - 2 \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y + 1 \end{aligned}$$

Løsning: La $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Det inhomogene systemet kan da omskrives

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

der A er som i punkt **a**). Likevektspunktet til systemet er $\hat{\mathbf{x}}$ der $A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow A\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{b}$. Altså $\hat{\mathbf{x}} = -A^{-1}\mathbf{b}$ hvis A^{-1} eksisterer. For å beregne A^{-1} bruker vi invers formelen for 2x2 matrise siden $\det(A) = -1$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = A.$$

Likevektspunktet er derfor

$$\hat{\mathbf{x}} = -A^{-1}\mathbf{b} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) (5%) Løs differensialligningene i punkt **b**) under initialbetingelsene $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

Løsning: Generelle løsningen til det inhomogene systemet i **b**) er summen av generelle løsningen til homogene systemet i **a**) og likevektspunktet i **b**). Altså

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-t} + 3C_2 e^t + 1, \\ y(t) &= -C_1 e^{-t} - C_2 e^t. \end{aligned}$$

Ved å bruke initialbetingelsene $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ får vi

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = C_1 + 3C_2 + 1, \\ -1 &= y(0) = -C_1 - C_2, \end{aligned}$$

som gir $C_1 = 3/2$ og $C_2 = -1/2$.

Løsningen til det inhomogene systemet i punkt **b**) under initialbetingelsene $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ er derfor

$$\begin{aligned} x(t) &= 3/2 e^{-t} - 3/2 e^t + 1, \\ y(t) &= -3/2 e^{-t} + 1/2 e^t. \end{aligned}$$