Oppgaver fra Øving 12, MA0002 2011V

11.1.24 $\quad \dot{\underline{X}} = A\underline{X}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{matrix}$

Egenverdi: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

Dvs. $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 1$ er egenverdiene

Egenvektor:

$\lambda_1 = -2$: $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} -u_1 + 4u_2 = 0 \\ -u_1 + 4u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad u_1 = 4u_2$

$\Rightarrow \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til $\lambda_1 = -2$.

$\lambda_2 = 1$: $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} -4v_1 + 4v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad v_1 = v_2$.

$\Rightarrow \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor til $\lambda_2 = 1$.

Generell løsning:

$$\underline{X}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x_1(t) = 4c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} \\ x_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} \end{cases}$$

Men $\quad x_1(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = x_1(0) = 4c_1 + c_2 \qquad 4c_1 + c_2 = 1$

$\quad x_2(0) = 2 \qquad\qquad 2 = x_2(0) = c_1 + c_2 \qquad c_1 + c_2 = 2 \quad \cdot -1$

Dvs. $\qquad 3c_1 = -1 \Rightarrow \underline{c_1 = -1/3}$

Spesiell løsning: (dvs. løsning av initialverdi problemet) $\qquad \Rightarrow c_2 = 2 - c_1 = 7/3$

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{7}{3}e^{t} \\ x_2(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{7}{3}e^{t} \end{cases}$$

Oppgave fra øving 12, MA0002 2011V

$\boxed{11.1.34}$ $\dot{\underline{X}} = AX, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

Egenverdi: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 2$

$\| $

$0 \iff \lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0, \quad \lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{49-8}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-7-\sqrt{41}}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{-7+\sqrt{41}}{2}$ er egenverdiene

Merk: $\sqrt{41} < \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \lambda_2 < 0$.

Siden $\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 < 0$, er $(0,0)$ stabilt likevektspkt.

- $(0,0)$ er sluk ("sink").

$\boxed{11.1.60}$ $\dot{\underline{X}} = AX, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Egenverdi: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 2$

$\|$

$0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \quad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{5-\sqrt{15}}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$ er egenverdiene.

Merk: $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \lambda_1 > 0$

Siden $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 > 0$, er $(0,0)$ et ustabilt likevektspunkt

- $(0,0)$ er kilde ("source").

Oppgaver fra Øving 12, MA0002 2011V

$\boxed{11.2.19}$ $\quad \boxed{x_1} \xrightarrow{0{,}3x_1} \boxed{x_2}$

$x_1(t)$ = mengda medisin i kroppen ved tid t

$x_2(t)$ = mengda medisin i urinen ved tid t.

Medisin blir skilt ut i urinen ved rate $0{,}3x_1$:

dvs. $\dfrac{dx_2}{dt} = 0{,}3x_1$.

vet at $\dfrac{dx_1}{dt} = -0{,}3x_1$, $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = 0$.

$\Rightarrow$

Vi løser
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -0{,}3x_1 & x_1(0) = 4 \quad (1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 0{,}3x_1 & x_2(0) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

<u>Merk at (1)</u> er ordinær diff. likning som er separabel (ikke avhengig av x_2):

Skriv $\dfrac{dx_1}{x_1} = -0.3\,dt$ $\qquad \displaystyle\int \frac{dx_1}{x_1} = -0{,}3\int dt$

$\ln|x_1| = -0{,}3t + C \Rightarrow x_1 = \pm e^{C} e^{-0{,}3t}$

DVS. $\underline{x_1(t) = c_1 e^{-0{,}3t}}$. Men $x_1(0) = 4 \Rightarrow 4 = x_1(0) = c_1$

Altså
$$\underline{\underline{x_1(t) = 4e^{-0{,}3t}}}.$$
Sette x_1 i (2).

<u>Av (2)</u>: $\dfrac{dx_2}{dt} = 0{,}3\left(4e^{-0{,}3t}\right) \Rightarrow \dfrac{dx_2}{dt} = 1{,}2e^{-0{,}3t}$

Skriv $dx_2 = 1{,}2e^{-0{,}3t}\,dt$, $\displaystyle\int dx_2 = \int 1{,}2e^{-0{,}3t}\,dt$

$x_2(t) = -4e^{-0{,}3t} + C$

Vi bruker $x_2(0) = 0$: for å bestemme C:

$0 = x_2(0) = -4 + C \Rightarrow C = 4$

Altså
$$x_2(t) = 4 - 4e^{-0{,}3t} = \underline{\underline{4\left(1 - e^{-0{,}3t}\right)}}$$

Oppgaver fra Øving 12, MA0002 2011V

$\boxed{11 \cdot 2 \cdot 21}$

(a) $\boxed{x_1} \underset{0,1x_2}{\overset{0,2x_1}{\rightleftarrows}} \boxed{x_2}$

$$\frac{dx_1}{dt} = -0,2x_1 + 0,1x_2 \qquad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,2x_1 - 0,1x_2 \qquad (2)$$

(b) $$\frac{d}{dt}(x_1+x_2) = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = -0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_1 - 0,1x_2 = 0$$

Dvs. $\underbrace{x_1(t) + x_2(t)}_{A(t)} =$ konstant for enhver tid

Betyr at totalt areal $A(t)$ er konstant for enhver tid.

(c) $x_1(0) + x_2(0) = 20$: ~~Fra~~ (b), vet at $x_1(t) + x_2(t) = x_1(0) + x_2(0)$

$\Rightarrow$ $x_1(t) + x_2(t) = 20$ for alle t.

for alle $t \geq 0$.

(d) Fra (c), har vi $x_2 = 20 - x_1$:

Sette $x_2 = 20 - x_1$ i (1) : $\frac{dx_1}{dt} = -0,2x_1 + 0,1(20-x_1)$

dvs. $\frac{dx_1}{dt} = 2 - 0,3x_1$ (bare x_1)

(e) $$\int \frac{dx_1}{2-0,3x_1} = \int dt, \quad \frac{1}{-0,3}\ln|2-0,3x_1| = t + C$$

$$\ln|2-0,3x_1| = -0,3t - 0,3C \Rightarrow 2 - 0,3x_1 = c_1 e^{-0,3t},$$

der $c_1 = \pm e^{-0,3C}$

$\Rightarrow$ $x_1(t) = \frac{2 - c_1 e^{-0,3t}}{0,3}$. Vet $x_1(0) = 2$

$\Rightarrow 2 = \frac{2-c_1}{0,3} \Rightarrow 0,6 = 2 - c_1 \Rightarrow \underline{\underline{c_1 = 1,4}}$

Altså $x_1(t) = \frac{2 - 1,4e^{-0,3t}}{0,3} = \underline{\underline{\frac{20}{3} - \frac{14}{3}e^{-0,3t}}}$

Også $x_2(t) = 20 - x_1(t) = 20 - \frac{20}{3} + \frac{14}{3}e^{-0,3t} = \underline{\underline{\frac{40}{3} + \frac{14}{3}e^{-0,3t}}}$

- $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{20}{3}$, $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = \frac{40}{3}$

Oppgaver fra øving 12, MA0002 2011V

$\boxed{11.2.23}$ $\qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} = -4x \qquad x(0)=0$ og $\dfrac{dx}{dt}(0)=6$

La $y = \dfrac{dx}{dt}$. Da er $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -4x$ og $y(0) = \dfrac{dx}{dt}(0) = 6$.

Altså (vi løser)

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = y & x(0)=0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x & y(0)=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \underline{X} = A\underline{x} \quad \text{der} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenverdi: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4, \ \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$\Rightarrow \lambda = \pm 2i$ er egenverdiene til A

som er på formen $a \pm i\omega$ der $\underline{a=0}$, $\underline{\omega = 2}$.

Generell løsning: $\underline{X}(t) = e^{at}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\cos\omega t + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}\sin\omega t\right)$, der $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega}(A - aI)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Dvs. $\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\cos 2t + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}\sin 2t$, $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2/2 \\ -2c_1 \end{bmatrix}$

siden $a = 0$ og $\omega = 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(t) = c_1\cos 2t + \frac{c_2}{2}\sin 2t \\ X_2(t) = c_2\cos 2t - 2c_1\sin 2t \end{cases}$$

Vet at $x(0)=0$ og $y(0)=6$: $\quad 0 = c_1$ og $6 = c_2$.

Altså er den spesiell løsning (dvs. løsningen med initial betingelsen)

$$\begin{cases} X_1(t) = 3\sin 2t \\ X_2(t) = 6\cos 2t \end{cases}$$

Derfor: $x(t) = 3\sin 2t$ løser $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -4x$, $x(0)=0$, $\dfrac{dx}{dt}(0) = 6$