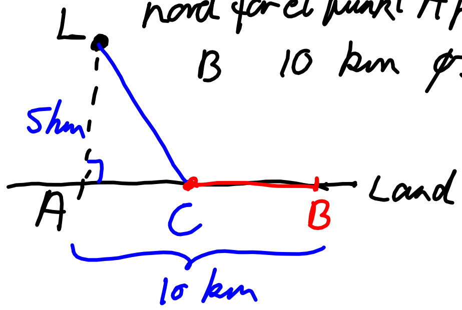
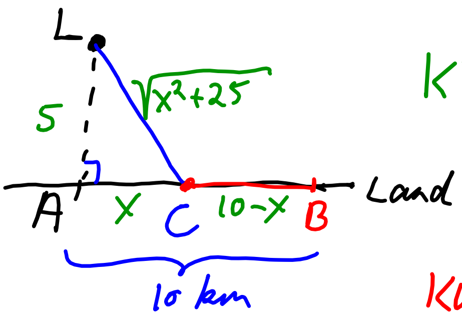
Eks. En strømkabel skal legges til et hus på ei øy 5 km rett nord for et punkt A på kystlinjen. Kabelen skal føres fra et punkt B 10 km øst for A til et punkt C på kystlinja mellom A og B. Kostnader for å legge kabelen er 5.000 $ per km i vannet og 3.000 $ per km langs kystlinjen.



Hvor må C ligge for å minimalisere kostnadene?

Løsn.



Kostnader: $K(x) = 5.000 \cdot \sqrt{x^2+25} + 3.000 \cdot (10-x)$

$$K'(x) = \frac{5.000 \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+25}} - 3.000 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{1.000}$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{\sqrt{x^2+25}} = 3 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+25}$$

Kvadrerer

$$\Rightarrow 25x^2 = 9(x^2+25)$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 9x^2 = 9 \cdot 25$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 9 \cdot 25 \Rightarrow 16x^2 = 9 \cdot 25$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{16}} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = \underline{3{,}75}$$

Siden vi har kvadrert, må vi sjekke at dette ikke er en falsk løsning. Innsetting gir at K'(3,75) = 0, så den er ok!
Det er vel rimelig å forvente at det finnes en x som gir minimum, slik at x = 3,75 vil gi en minimumsverdi. For å virkelig sjekke det kan vi drøfte K'(x) på tallinja eller vise at K''(3,75) > 0.
Eller: Siden K(x) er en kontinuerlig funksjon, og K'(x) er definert for alle x mellom 0 og 10, så må vi ha enten et toppunkt eller et bunnpunkt i x = 3,75, og dette er det eneste topp-eller bunnpunktet i intervallet. Siden K(3,75) = 50.000 < K(0) = 55.000, må det da være et bunnpunkt.

<u>Punktet C må altså ligge 3,75 km øst for A for å gi lavest mulig kostnad, og denne lavest mulige kostnaden er da 50.000 dollar.</u>