

Løsningsforslag

MA0001 – Brukerkurs i matematikk A

Eksamen høst 2023

Flervalgsoppgaver

Oppgave 1:

Riktig svar: Grenseverdien er lik $\frac{1}{3}$.

Begrunnelse: Vi kan dele på høyeste potens av x , som er 3. Vi får da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 6x}{3x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2}}{3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

Oppgave 2:

Riktig svar: Verdimengden til funksjonen er lik $[0, \infty)$.

Begrunnelse: Vi kan analysere verdimengden ved å analysere verdimengden i hvert steg for å bygge funksjonen. Verdimengden til x^2 er $[0, \infty)$, så verdimengden til $x^3 - 3$ er $[-3, \infty)$. Når vi til slutt tar absoluttverdien, altså $f(x) = |x^3 - 3|$ så blir verdimengden $[0, \infty)$, ettersom verdiene $[-3, 0]$ blir positive.

Oppgave 3:

Riktig svar: Man kan bruke L'Hôpitals regel dersom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Begrunnelse: Dersom $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ så er $f'(x) = 0$, altså er $f(x)$ en konstant funksjon, men for eksempel grensen

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

men $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{1} = 0$, og $\frac{1}{2} \neq 0$. Dette viser også at vi ikke alltid kan bruke L'Hôpitals regel når $f(x)$ og $g(x)$ er polynomer. Dersom $g(x) = 0$ så er brøken $\frac{f(x)}{g(x)}$ udefinert, så hverken brøken eller grenseverdien gir mening.

For at vi skal kunne bruke L'Hôpitals regel må vi ha at f og g er deriverbare funksjoner, med $g'(x) \neq 0$ og $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. I tillegg må grensen $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksistere.

Oppgave 4:

Riktig svar: Funksjonen $f(x) = \ln(x)$ er: kontinuerlig, injektiv og har dermed en invers, surjektiv, og er definert på intervallet $(0, \infty)$.

Begrunnelse: Siden $\ln(x)$ er inversen til e^x , som er en injektiv kontinuerlig funksjon definert på hele \mathbb{R} og har verdimengde $(0, \infty)$ har vi at $\ln(x)$ er en injektiv kontinuerlig funksjon definert på intervallet $(0, \infty)$, altså $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Den har også en invers, nemlig e^x . Vi kan se at $\ln(x)$ er surjektiv ettersom for en hver $y \in \mathbb{R}$ har vi $y = \ln(e^y)$, så vi kan sette $e^y = x$ og få $\ln(x) = y$.

Oppgave 5:

Riktig svar: Inversen til $\sin(x)$ er definert på $[-1, 1]$.

Begrunnelse: Dersom $f: A \rightarrow B$ er en injektiv funksjon med verdimengde V_f , så har f en invers $f: V_f \rightarrow A$. Sinusfunksjonen $\sin(x)$ er injektiv på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Altså har vi

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R},$$

med verdimengde $[-1, 1]$ som betyr at inversen $\sin^{-1}(x)$ er definert på $[-1, 1]$.

Oppgave 6:

Riktig svar: Amplituden til summen av de to harmoniske svingningene er 5.

Begrunnelse: Vi vet at cosinusfunksjonen er en faseforskyving av sinusfunksjonen, altså $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (dette kan man også finne fra summeformelen for cosinus oppgitt på formelarket). Altså har vi

$$3 \sin(x) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3 \sin(x) + 2 \sin(x) = 5 \sin(x),$$

som betyr at amplituden er lik 5.

Skriftlige oppgaver

Oppgave 7:

Vi skal finne den lineære tilnærmingen til funksjonen $f(x) = \sin^{-1}(x)$ i punktet $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Formelen for den lineære tilnærmingen er gitt på formelarket og er lik $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Vi må altså beregne $f(a)$ og $f'(a)$. Siden f er en inversfunksjon kan vi skrive $f = g^{-1}$ og bruke formelen for den deriverte til en invers (gitt på formelarket) til å finne $f'(x)$. I dette tilfellet er inversen $g(x) = \sin(x)$. Vi har

$$(g^{-1}(x))' = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(x))}$$

som gir

$$f(a) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{og} \quad f'(a) = \frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}.$$

Vi kan nå sette dette inn i formelen for den lineære tilnærmingen som gir:

$$T_1(x) = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}x + \frac{\pi}{4} - 1.$$

Oppgave 8a:

Vi ønsker å finne det globale toppunktet til funksjonen $P(t) = e^t \sin(t)$ på intervallet $[0, 3]$. Det er da to ting vi må gjøre: **1)** finne verdier $a \in [0, 3]$ slik at $f'(a) = 0$ og **2)** sjekke verdiene i endepunktene i intervallet.

1) Vi kan derivere $P(t)$ med produktregelen. Vi får

$$P'(t) = (e^t)' \sin(t) + e^t(\sin(t))' = e^t \sin(t) + e^t \cos(t).$$

For at P' skal være lik 0 må vi altså finne et punkt a i intervallet $[0, 3]$ slik at $\sin(a) = -\cos(a)$. Ved å for eksempel tegne opp enhetssirkelen kan vi enkelt se at dette skjer kun når $a = \frac{3\pi}{4}$ dersom vi ønsker vinkler mellom 0 og 3.

Vi kan sjekk om a er et lokalt topp- eller bunnpunkt ved å bruke andrederiverttesten. Vi bruker igjen produktregelen og får

$$P''(t) = e^t \sin(t) + e^t \cos(t) + e^t \cos(t) - e^t \sin(t) = 2e^t \cos(t),$$

som er negativ i a fordi $P''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$ og e^x er alltid større enn 0. Dermed er a et lokalt toppunkt med verdi $P(a) = e^{\frac{3\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx 7.46$.

Vi må også sjekke endepunktene i intervallet. Vi har $P(0) = e^0 \sin(0) = 0$ og $P(3) = e^3 \sin(3) \approx 2.83$. Dette betyr at $P(t)$ har sitt globale toppunkt i $a = \frac{3\pi}{4}$, som betyr at populasjonen var på sitt største ved dette tidspunktet. Altså, populasjonen nådde en maksimumsverdi på 7.46 tusen individer i løpet av de tre årene.

Oppgave 8b:

Vi ønsker å beregne hvor stor befolkningen har vært i gjennomsnitt på de tre årene. Fra formelarket vet vi at vi kan finne gjennomsnittet \bar{P} ved formelen

$$\bar{P} = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(t) dt.$$

Vi har $a = 0$ og $b = 3$, så vi må beregne

$$\frac{1}{3} \int_0^3 P(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^3 e^t \sin(t) dt.$$

Hintet i oppgaven sier at vi burde bruke I -metoden, altså å bruke delvis integrasjon flere ganger.

Vi starter med å beregne $I = \int_0^3 e^t \sin(t) dt$ med delvis integrasjon. Vi setter $u(t) = e^t$ og $v(t) = -\cos(t)$, som gir

$$I = \int_0^3 e^t \sin(t) dt = [-e^t \cos(t)]_0^3 - \int_0^3 e^t (-\cos(t)) dt = [-e^t \cos(t)]_0^3 + \int_0^3 e^t \cos(t) dt.$$

Vi ønsker nå å bruke delvis integrasjon for å beregne $\int_0^3 e^t \cos(t) dt$. Vi setter $u(t) = e^t$ og $v(t) = \sin(t)$, som gir

$$\int_0^3 e^t \cos(t) dt = [e^t \sin(t)]_0^3 - \int_0^3 e^t \sin(t) dt.$$

Setter vi dette sammen får vi

$$I = \int_0^3 e^t \sin(t) dt = [-e^t \cos(t)]_0^3 + [e^t \sin(t)]_0^3 - \int_0^3 e^t \sin(t) dt$$

som vi ser gir

$$I = [-e^t \cos(t)]_0^3 + [e^t \sin(t)]_0^3 - I.$$

Vi plusser på I på begge sider som gir $2I = [-e^t \cos(t)]_0^3 + [e^t \sin(t)]_0^3$ eller

$$I = \frac{[-e^t \cos(t)]_0^3 + [e^t \sin(t)]_0^3}{2}.$$

Vi setter nå inn verdiene og får

$$I = \frac{-e^3 \cos(3) + e^0 \cos(0) + e^3 \sin(3) - e^0 \sin(0)}{2} = \frac{e^3(\sin(3) - \cos(3)) + 1}{2} \approx 11.86.$$

Vi får da til slutt $\bar{P} \approx \frac{1}{3} \cdot 11.86 \approx 3.95$. Altså var det i gjennomsnitt 3.95 tusen individer i befolkningen gjennom de tre årene.

Oppgave 9a:

Funksjonen $f(x) = x^2 - 17$ er en kontinuerlig funksjon med $f(4) = 16 - 17 = -1$ og $f(5) = 25 - 17 = 8$. Siden den er kontinuerlig og er negativ i $x = 4$ og positiv i $x = 5$ må det finnes et punkt a på intervallet $[4, 5]$ slik at $f(a) = 0$. Denne verdien a er presist lik $\sqrt{17}$.

Oppgave 9b:

Fra formelarket vet vi at Newtons metode er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Vi har oppgitt at vi skal bruke $n = 3$ steg, altså vil vi beregne x_1 , x_2 og x_3 . Informasjonen vi trenger for å beregne disse er $f(x) = x^2 - 17$, $f'(x) = 2x$ og $x_0 = 4$ ettersom vi skulle velge nærmeste heltallsverdi. Vi får

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - \frac{4^2 - 17}{2 \cdot 4} = \frac{33}{8} = 4.125 \\ x_2 &= \frac{33}{8} - \frac{\left(\frac{33}{8}\right)^2 - 17}{2 \cdot \frac{33}{8}} = \frac{2177}{528} \approx 4.123 \\ x_3 &= \frac{2177}{528} - \frac{\left(\frac{2177}{528}\right)^2 - 17}{2 \cdot \frac{2177}{528}} = \frac{9478657}{2298912} \approx 4.123 \end{aligned}$$

Dermed er $\sqrt{17}$ tilnærmet lik 4.123.

Oppgave 10a:

Vi vil beregne reaksjonskonstanten k til formelen $c(t) = c(0)e^{-kt}$. Vi har gjort to målinger,

$$\begin{aligned}c(0) &= 5.0 \cdot 10^{-7} \\c(1) &= 1.172 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

Vi kan finne reaksjonskonstanten k ved å bruke disse to målingene. Vi har fra formelen for $c(t)$ at $c(1) = c(0)e^{-k}$, som ved å sette inn verdiene for $c(0)$ og $c(1)$ gir

$$1.172 \cdot 10^{-7} = 5.0 \cdot 10^{-7} e^{-k}.$$

Vi deler på $5.0 \cdot 10^{-7}$ på begge sider og får

$$e^{-k} = \frac{1.172 \cdot 10^{-7}}{5.0 \cdot 10^{-7}} = \frac{1.172}{5}.$$

Vi tar så den naturlige logaritmen på begge sider som gir oss

$$\ln(e^{-k}) = \ln\left(\frac{1.172}{5}\right).$$

Ved å bruke regnereglene for logaritmer vet vi at $\ln(e^{-k}) = -k \cdot \ln(e) = -k$, så vi har dermed

$$k = -\ln\left(\frac{1.172}{5}\right) \approx 1.45.$$

Vi konkluderer med at reaksjonskonstanten k til insektmiddelet X er tilnærmet lik 1.45.

Oppgave 10b:

Endringsraten til konsentrasjonen er gitt ved den deriverte til konsentrasjonsfunksjonen, altså $c'(t)$. Vi ønsker å vite endringsraten i det vi gjør den andre målingen etter ett år, så vi ønsker å beregne $c'(1)$.

Vi har $c(t) = c(0)e^{-kt}$, så fra kjerneregelen (der vi bruker kjernen $-kt$) så er

$$c'(t) = c(0)e^{-kt} \cdot (-kt)' = -kc(0)e^{-kt}.$$

Vi setter inn for $t = 1$, $c(0) = 5.0 \cdot 10^{-7}$ og $k = 1.45$, som gir

$$c'(1) = -1.45 \cdot 5.0 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-1.45} \approx -1.7 \cdot 10^{-7}.$$

Endringsraten når vi gjør den andre målingen er dermed $-1.7 \cdot 10^{-7}$ gram per kubikkcentimeter per år.

Oppgave 10c:

Halvveringstiden til insektmiddelet X er en verdi T slik at $c(T) = \frac{1}{2}c(0)$. Fra konsentrasjonsfunksjonen har vi

$$c(T) = c(0)e^{-1.45T},$$

så vi finner svaret ved å løse ligningen $c(0)e^{-1.45T} = \frac{1}{2}c(0)$.

Vi deler på $c(0)$ på begge sider som gir $e^{-1.45T} = \frac{1}{2}$. Vi tar så den naturlige logaritmen på begge sider og får $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-1.45T})$. Ved å bruke regnereglene for logaritmer får vi $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ og $\ln(e^{-1.45T}) = -1.45T \ln(e) = -1.45T$. Setter vi dette sammen har vi $-\ln(2) = -1.45T$, som ved å dele på -1.45 på begge sider gir

$$T = \frac{\ln(2)}{1.45} \approx 0.478.$$

Halvveringstiden til insektmiddelet X er altså 0.478 år.

Oppgave 11:

Før vi bruker trapesmetoden må vi i denne oppgaven finne hvor mange delintervall vi skal bruke for å ha en feilmargin som er mindre enn 0.01. Feilmarginformelen for trapesmetoden er gitt i formelarket, og er lik

$$|I - T(n)| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}$$

der M er et tall slik at $|f''(x)| \leq M$ for alle $x \in [a, b]$. I vår situasjon har vi $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ og det er gitt i oppgaveteksten at $|f''(x)| \leq 2$ for alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Altså, dersom vi ønsker en feilmargin mindre enn 0.01 må vi finne en n slik at

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2}{12n^2} < 0.01.$$

Vi har $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, som gir

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2}{12n^2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot 2}{12n^2} = \frac{\frac{1}{4}}{12n^2} = \frac{1}{4 \cdot 12n^2} = \frac{1}{48n^2}.$$

Vi kan nå løse ulikheten $\frac{1}{48n^2} < 0.01$ ved å dele på 0.01 og gange med $48n^2$ på begge sider. Dette gir

$$48n^2 > \frac{1}{0.01} = 100.$$

Vi løser for n og får $n > \sqrt{\frac{100}{48}} \approx 1.443$. Så ved å velge n til å være 2 eller større vil vi få en feilmargin som er mindre enn 0.01, slik vi ønsker. Vi velger $n = 2$.

Trapesmetoden med $n = 2$ delintervaller sier oss at

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^4} dx \approx T(2) = \frac{\Delta x}{2} \left(\sqrt{1-x_0^4} + 2\sqrt{1-x_1^4} + \sqrt{1-x_2^4} \right).$$

Vi har $\Delta x = \frac{\frac{1}{2}-0}{2} = \frac{1}{4}$ som gir $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$ og $x_2 = \frac{1}{2}$. Setter vi dette inn i formelen for trapesmetoden får vi

$$\begin{aligned} T(2) &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{1-(0)^4} + 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^4} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{1} + 2\sqrt{1-\frac{1}{256}} + \sqrt{1-\frac{1}{16}} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + 2\sqrt{\frac{255}{256}} + \sqrt{\frac{15}{16}} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + 2\frac{\sqrt{255}}{\sqrt{256}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{255}}{16} + \frac{\sqrt{15}}{4} \right) \\ &\approx 0.4955. \end{aligned}$$

Integralet av funksjonen $\sqrt{1-x^4}$ på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$ er dermed tilnærmet lik 0.4955, med en feilmargin mindre enn 0.01.

Oppgave 12:

Vi har fire kurver og skal finne arealet til figuren begrenset av disse, som ligner en blomst med fire blader. Vi ser fra bildet at kurvene er parvis symmetriske, så vi trenger bare beregne arealet til en av blomsterbladene, og så gange med 4 for å få det totale arealet. Vi beregner arealet til bladet øverst til høyre, men merk at man kunne valgt hvilket som helst av bladene.

Blomsterbladet øverst til høyre er figuren i planet mellom kurvene $y = x^3$ og $x = y^3$, altså kurve nummer 1 (blå) og kurve nummer 2 (rød). Vi kan beskrive disse to kurvene som grafene til funksjonene $f(x) = x^3$ og $g(x) = \sqrt[3]{x}$ respektivt. Disse to funksjonene skjærer hverandre i $x = 0$ og $x = 1$. Vi har $g(x) \geq f(x)$ på intervallet $[0, 1]$, så vi kan finne arealet mellom grafene ved formelen

$$A = \int_0^1 g(x) - f(x) \, dx = \int_0^1 \sqrt[3]{x} - x^3 \, dx.$$

En antiderivert til x^3 er $\frac{1}{4}x^4$, mens en antiderivert til $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ er $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$. Vi får da

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{x} - x^3 \, dx &= \int_0^1 \sqrt[3]{x} \, dx - \int_0^1 x^3 \, dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Altså er arealet til en av de fire blomsterbladene lik $\frac{1}{2}$. Dette betyr at det totale arealet til blomsten er lik $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.