Eksamen MA0001 – Brukekurs i matematikk A, K23

Det er mulig å oppnå totalt 100 poeng, der flervalgsoppgavene teller 30 og de skriftlige teller 70. Antall poeng korresponderer til karakter via NTNUs karakterskala, potensielt justert.

Flervalgsoppgaver

Oppgave 1:

For å finne ekstremalpunkt må vi derivere funksjonen og sette lik null. Vi får

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1.$$

For å finne ut hvilket av disse som gir et lokalt toppunkt deriverer vi på nytt og setter inn verdiene:

$$f''(x) = 6x, \quad f''(1) = 6 \text{ og } f''(-1) = -6.$$

Siden den andrederiverte til f er negativ i $x = -1$ må dette være et lokalt toppunkt. Siden den er positiv i $x = 1$ er dette et lokalt bunnpunkt. Dermed er riktig svar $x = -1$.

Oppgave 2:

Funksjonen $\tan(x)$ kan beskrives som $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, så en alternativ beskrivelse av f er

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}.$$

Funksjonen $\sin^2(x)$ er ikke-negativ, så asymptotene til f opptrer nå $\cos(x) = 0$. Cosinusfunksjonen har nullpunkter i $x = \frac{(2n+1)\cdot\pi}{2}$ for $n \in \mathbb{Z}$. Siden intervallet vårt kun består av ikke-negative tall trenger vi kun å sjekke $n \in \mathbb{N}$. Vi får

- $n = 0: \quad \dfrac{(2\cdot 0+1)\cdot\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \approx 1.57$
- $n = 1: \quad \dfrac{(2\cdot 1+1)\cdot\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \approx 4.71$
- $n = 2: \quad \dfrac{(2\cdot 3+1)\cdot\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{2} \approx 7.85$
- $n = 3: \quad \dfrac{(2\cdot 3+1)\cdot\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{2} \approx 10.99$

som betyr at f har 3 asymptoter på intervallet $[0, 10]$.

Oppgave 3:

Vi finner arealet under grafen til funksjonen ved å integrere absoluttverdien til funksjonen, men siden funksjonen f ikke er negativ på intervallet vi integrerer over trenger vi ikke bekymre oss for absoluttverdien, da vi har $|f(x)| = f(x)$ på intervallet $[0, 2]$. Vi får

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2 - x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}.$$

Oppgave 4:

Funksjonen $f(x) = \mathrm{e}^x$ er ikke surjektiv ettersom den kun gir positive verdier. Den er ikke lineær ettersom for eksempel $f(1+1) = e^2 = e \cdot e \neq e + e = f(1) + f(1)$. Funksjonen er heller ikke et polynom, men den er kontinuerlig, som er riktig svar.

Oppgave 5:

For å løse oppgaven er det enklest å tegne opp trekanten og se hvor de skjærer hverandre. Linjene l_1 og l_2 skjærer hverandre i punktet $(1, 2)$; linjene l_1 og l_3 skjærer hverandre i $(1, 1)$; linjene l_2 og l_3 skjærer hverandre i $(2, 2)$. Trekanten er dermed rettvinklet, der de to katetene har lengde 1. Arealet til trekanten er dermed $\frac{1}{2}$.

Oppgave 6:

Funksjonen $f(x) = \cos(x)$ kan ikke være injektiv på intervallene $[-1, 1]$ og $[-\pi, \pi]$, ettersom funksjonen er en "like" funksjon, altså er den symmetrisk om y aksen. På intervallet $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ gjennomfører funksjonen så og si en halv periode fra et nullpunkt til det neste. Funksjonen kan dermed ikke være injektiv på det intervallet. På intervallet $(0, \pi)$ derimot går funksjonen fra et toppunkt til et bunnpunkt, uten at dens deriverte noen gang er 0. Dermed må funksjonen være injektiv på dette intervallet, og riktig svar er dermed $(0, \pi)$.

Skriftlige oppgaver

Oppgave 7:

For å finne nullpunktene til et polynom av grad to kan vi bruke den kjente andregradsformelen, også noen ganger kalt *abc*-formelen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Denne gir oss enten null, ett eller to nullpunkter, alt basert på diskriminanten $b^2 - 4ac$. Dersom denne er negativ er det ingen nullpunkter, dersom den er lik 0 er det kun ett nullpunkt, og dersom den er positiv er det to unike nullpunkter.

I vårt tilfelle er diskriminanten lik

$$(-2\lambda)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 2 = 4\lambda^2 - 8\lambda = 4\lambda(\lambda - 2)$$

Denne er null når $\lambda = 0$ eller $\lambda = 2$ og er negativ når $\lambda \in (0, 2)$. Dermed er den positiv dersom $\lambda > 2$ eller $\lambda < 0$, som gjør at funksjonen vår har nøyaktig to ulike nullpunkter dersom $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Oppgave 8:

For å finne den deriverte til funksjonen beskriver vi den først om som en sammensatt funksjon, og så beregner den deriverte ved hjelp av kjerneregelen. Vi lar $h(x) = \ln(x)$ og $f(x) = 2^x$, som gir oss at $g(x) = f(h(x))$. Via kjerneregelen får vi da at $g'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Vi vet at den deriverte til den naturlige logaritmefunksjonen er $\frac{1}{x}$, så det som gjenstår er å beregne den deriverte til $f(x) = 2^x$.

I formelarket er det oppgitt at $a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$. Den deriverte til $e^{b \cdot x}$ er lik $b \cdot e^{b \cdot x}$, så vi får

$$f'(x) = (e^{\ln(2) \cdot x})' = \ln(2) \cdot e^{\ln(2) \cdot x} = \ln(2) \cdot 2^x,$$

der den siste likheten igjen kommer fra å bruke formelen $a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$ fra formelarket.

Dermed kan vi sette sammen igjen de to deriverte funksjonene våre og få:

$$g'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = \ln(2) \cdot 2^{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln(2) \cdot 2^{\ln(x)}}{x}.$$

Oppgave 9:

La oss først beskrive informasjonen gitt i oppgaven ved bruk av matematiske symboler. Vi lar m_B være vekten til ballongen, m_I være vekten til måleinstrumentet og m være den totale vekten $m = m_B + m_I$, alle oppgitt i kilo. Vi har da $m_B = 1.5$, $m_I = 9.0$ og $m = 10.5$. Vi har også fått oppgitt hvor fort ballongen fylles, altså endring i volum. Dersom vi lar radiusen være en funksjon avhengig av tid, altså $r(t)$, så blir endring i volum beskrevet ved å derivere volumfunksjonen med hensyn på tiden t, altså:

$$\frac{\mathrm{d}V(r(t))}{\mathrm{d}t} = 1\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}.$$

Oppgave 9a:

Etter fire minutter er volumet til kulen blitt $4\mathrm{m}^3$, ettersom vi fyller $1\mathrm{m}^3$ per minutt. Vi kan da bruke volumformelen til å beregne radiusen.

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4 \implies r^3 = \frac{3}{\pi} \implies r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \approx 0.985,$$

som betyr at radiusen er blitt ca 0.985 meter.

Oppgave 9b:

Vi ønsker å finne hvor mye overflatearealet øker, altså endring i overflateareal. Endring er som kjent beskrevet av den deriverte, som i likhet med volumfunksjonen må deriveres med hensyn på tid. Vi ønsker altså å finne $\frac{\mathrm{d}O(r(t))}{\mathrm{d}t}$. Siden $O(r(t))$ er en sammensatt funksjon kan vi bruke kjerneregelen til å få

$$\frac{\mathrm{d}O(r(t))}{\mathrm{d}t} = O'(r(t)) \cdot r'(t).$$

Vi deriverer overflatearealfunksjonen $O(r)$, som gir $O'(r) = 8\pi r$. Fra oppgaveteksten vet vi at radiusen er lik 1 meter, så vi har

$$O'(r(t)) = 8\pi \cdot 1 = 8\pi.$$

Så det siste som gjenstår er å finne $r'(t)$. For å gjøre dette bruker vi at vi vet endringen i volumet, $\frac{\mathrm{d}V(r(t))}{\mathrm{d}t} = 1$. Via kjerneregelen har vi

$$1 = \frac{\mathrm{d}V(r(t))}{\mathrm{d}t} = V'(r(t)) \cdot r'(t) = 4\pi r(t)^2 \cdot r'(t),$$

der vi har derivert volumfunksjonen V, altså $V'(r) = 4\pi r^2$. Vi setter inn $r(t) = 1$, slik som oppgitt i oppgaveteksten, som gir

$$4\pi 1^2 \cdot r'(t) = 1 \implies r'(t) = \frac{1}{4\pi}.$$

Vi kan nå sette alt sammen:

$$\frac{\mathrm{d}O(r(t))}{\mathrm{d}t} = O'(r(t)) \cdot r'(t) = 8\pi \cdot \frac{1}{4\pi} = 2,$$

som betyr at overflatearealet øker med 2 kvadratmeter per minutt.

Oppgave 9c:

For at ballongen med måleinstrumentet skal lette fra bakken må hydrogengassen løfte $m = 10.5$ kilo. Siden løftekraften er 1.2 kilo per kvadratmeter må vi altså ha $\frac{10.5}{1.2} = 8.75$ kvadratmeter med hydrogengass.

Vi bruker volumformelen og får

$$8.75 = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \implies r^3 = \frac{3 \cdot 8.75}{4\pi} \implies r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 8.75}{4\pi}} \approx 1.278,$$

som betyr at radiusen på ballongen er ca 1.278 meter når ballongen med måleinstrumentet letter fra bakken.

Oppgave 10:

Fra hintet i oppgaven bruker vi de trigonometriske identitetene oppgitt på formelarket for å løse oppgaven. Identitetene er: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ og $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

Vi beregner først $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\ \mathrm{d}x$. Ved å sette $x = y$ i den andre identiteten får vi $\sin^2(x) = \cos^2(x) - \cos(2x)$, og via den første identiteten har vi $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Setter vi disse sammen får vi

$$\sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \cos(2x) \implies \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

Vi setter dette inn i integralet som gir oss

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ved å bruke den første identiteten kan vi nå også regne det andre integralet:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1 - \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1\ \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Oppgave 11:

Taylorpolynomet til en funksjon $f(x)$ av grad 2 om punktet a er gitt på formelarket ved

$$T_2^a(f) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2,$$

så vi trenger å beregne den deriverte og den andrederiverte til funksjonen vår $f(x) = \sqrt(x)$. Vi får

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \implies f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \text{ og } f''(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2},$$

som ved å sette inn i uttrykket for Taylorpolynomet gir

$$T_2^{a=1}(f) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}.$$

Oppgave 12a:

Vi har fått oppgitt $f(x) = \sin(x)$, $n = 3$ og $x_0 = 2.2$. Vi regner ut x_1, x_2 og x_3 med formelen for Newtons metode oppgitt på formelarket: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

- $x_1 = x_0 - \frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)} = 2.2 - \frac{\sin(2.2)}{\cos(2.2)} \approx 3.57382$

- $x_2 = x_1 - \frac{\sin(x_1)}{\cos(x_1)} = 3.57382 - \frac{\sin(3.57382)}{\cos(3.57382)} \approx 3.11250$
- $x_3 = x_2 - \frac{\sin(x_2)}{\cos(x_2)} = 3.11250 - \frac{\sin(3.11250)}{\cos(3.11250)} \approx 3.14160$

Oppgave 12b:

Vi gjennomfører nøyaktig den samme prosessen bare med Steffensens metode istedenfor Newtons metode, alså bruker vi formelen $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$.

- $x_1 = x_0 - \frac{\sin^2(x_0)}{\sin(x_0+\sin(x_0))-\sin(x_0)} = 2.2 - \frac{\sin^2(2.2)}{\sin(2.2+\sin(2.2))-\sin(2.2)} \approx 3.16726$
- $x_2 = x_1 - \frac{\sin^2(x_1)}{\sin(x_1+\sin(x_1))-\sin(x_1)} = 3.16726 - \frac{\sin^2(3.16726)}{\sin(3.16726+\sin(3.16726))-\sin(3.16726)} \approx 3.14159$
- $x_3 = x_2 - \frac{\sin^2(x_2)}{\sin(x_2+\sin(x_2))-\sin(x_2)} = 3.14159 - \frac{\sin^2(3.14159)}{\sin(3.14159+\sin(3.14159))-\sin(3.14159)} \approx 3.14159$

Oppgave 12c:

Siden det er et nullpunkt vi itererer etter, så trenger vi bare å anvende funksjonen vår $\sin(x)$ på de to foreslåtte nullpunktene $x_1 = 3.14160$ og $x_2 = 3.14159$ og sjekke hvilket av de som er nærmest null. Vi får

$$\sin(3.14160) \approx -0.00000734 \text{ og } \sin(3.14159) \approx 0.00000265,$$

som betyr at Steffensens metode var litt mer nøyaktig i dette tilfellet. Dette passer også med siffrene i $\pi = 3.141592...$, som er det nullpunktet vi itererer etter.