

Eksamen MA0001 - Brukerkurs i matematikk A, H22

Flervalgsoppgaver

Oppgave 1:

Riktig svar: Den største mulige definisjonsmengden er $[1, \infty)$.

Vi vet at kvadratrotfunksjonen er definert for alle tall større enn eller lik null så derfor må vi ha $\ln(x^3) \geq 0$. Funksjonen $\ln(x)$ er positiv for alle $x > 1$ og lik null i $x = 1$. Dermed må vi ha $x^3 \geq 1$, som gir oss $x \geq 1$. Altså er den største mulige definisjonsmengden lik $[1, \infty)$.

Oppgave 2:

Riktig svar: Funksjonen f er injektiv.

Funksjonen er ikke kontinuerlig, ettersom

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0) = 1.$$

Funksjonen er ikke lineær, ettersom den er gitt av en andregradsfunksjon for alle $x \geq 0$. Funksjonen er heller ikke surjektiv, da det ikke finnes noen x slik at $f(x) \in [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Dermed treffer ikke funksjonen vår hele mengden \mathbb{R} .

Funksjonen er derimot injektiv, ettersom funksjonen x er injektiv for $x < 0$ og $x^2 + 1$ er injektiv for $x \geq 0$.

Oppgave 3:

Riktig svar: $\tan(x)$ har 3 nullpunkter på intervallet $[1, 10]$.

Vi vet at $\tan(\pi) = 0$ ettersom $\tan(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1}$. Vi vet også at $\tan(x)$ er π -periodisk, så vi har også

- $\tan(2\pi) = 0$
- $\tan(3\pi) = 0$

Vi har også at $\tan(4\pi) = 0$ og at $\tan(0) = 0$, men $4\pi > 10$ og $0 < 1$ så disse nullpunktene ligger utenfor intervallet vårt $[1, 10]$.

Oppgave 4:

Riktig svar: Punktet $\frac{1}{\sqrt{3}}$ er et lokalt bunnpunkt.

Vi kan sjekke for ekstremalpunkter ved å finne når den deriverte er lik null. Den deriverte av funksjonen $f(x) = x(x^2 - 1) = x^3 - x$ er

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Vi setter $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ noe som gir $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Den andrederiverte er lik $f''(x) = 6x$ som er positiv for alle $x > 0$, som betyr at $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ er et lokalt bunnpunkt.

Oppgave 5:

Riktig svar: Funksjonen $7x - 3$ er den lineære tilnærmingen til $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ i punktet $a = 1$.

Dette kan sjekkes ved å finne Taylorpolynomet av grad en om punktet $a = 1$ til denne funksjonen. Vi har

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Regner vi ut disse verdiene får vi $f(1) = 4$ og $f'(x) = 3x^2 + 4x$, som gir $f'(1) = 7$. Setter vi dette inn i den generelle formelen får vi

$$T_1(x) = 4 + 7(x - 1) = 7x - 3.$$

Prøver vi en av de andre valgmulighetene vil vi ikke få samme funksjon.

Oppgave 6:

Riktig svar: Arealet under grafen er $\ln(2)$.

Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ er positiv for alle verdier i $[2, 4]$, så vi finner arealet ved å integrere funksjonen over dette intervallet. Vi får da

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx = [\ln(|x|)]_{x=2}^{x=4} = \ln(4) - \ln(2) = \ln\left(\frac{4}{2}\right) = \ln(2),$$

der vi har brukt både at $\ln(|x|)$ er en antiderivert til $\frac{1}{x}$ og regnereglerne for logaritmer.

Skriftlige oppgaver

Oppgave 7:

For at g skal være en kontinuerlig funksjon må den være kontinuerlig for alle punkter. Den er en funksjon definert ved to andre funksjoner, som begge er kontinuerlige i alle punkter. Altså er den eneste mulig punktet der noe ukontinuerlig kan skje i punktet $x = 1$.

Funksjonen i $x = 1$ gir

$$f(1) = 1e^{1-1} = 1$$

så for at funksjonen skal være kontinuerlig i $x = 1$ må vi ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

Siden funksjonen xe^{1-x} er kontinuerlig så har vi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$, så det som gjenstår å finne en verdi k slik at $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.

Vi har

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - (x - k)^2 = 1 - (1 - k)^2 = 1 - (1 - 2k + k^2) = 2k - k^2$$

Vi må da ha at $2k - k^2 = 1$, eller skrevet som en andregradsligning: $k^2 - 2k + 1 = 0$. Vi kan bruke andregradsligningen for å finne løsningene til denne, og vi får

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1.$$

Så, for at funksjonen skal være kontinuerlig må vi ha $k = 1$.

Oppgave 8a:

Huskeregelen gir $\frac{1000\text{m}}{3\text{s}} \approx 333.3\text{ m/s}$, altså at en lydbølge beveger seg med en hastighet rundt 333.3 meter i sekundet, som er rundt 1200 kilometer i timen. Den faktiske lydhastigheten, ikke bare en tilnærming fra denne regelen er ca 1236 km/s, så ikke så veldig langt unna!

Oppgave 8b:

Vi må først konvertere fra meter til miles. Vi får

$$1 \text{ miles} = 8 \cdot 10 \cdot 22 \cdot 0.9144 \text{ meter} = 1609.344 \text{ meter.}$$

Dette betyr at lyden beveger seg med en hastighet på $\frac{333.3}{1609.344} \approx 0.2$ miles per sekund. Så, etter fem sekunder har da lyden beveget seg cirka $5 \cdot 0.2 = 1$ miles.

Vi kan da lage en huskeregel som sier, "dersom det tar fem sekunder før du hører tordenskrallet slo lynet ned ca en miles unna".

Oppgave 8c:

Arealet til sirkelen er gitt ved formelen $A = \pi r^2$. Siden radiusen nå er en funksjon av tiden har vi $A(r(t)) = \pi r(t)^2$, der vi enten kan velge radiusfunksjonen i meter eller i miles. Vi velger her å bruke miles som gir en radiusfunksjon $r(t) = 0.2t$

Vi får da at $A(r(t)) = \pi(0.2t)^2$. Vi kan beskrive denne som kun en funksjon avhengig av tiden t ved å faktorisere ut 0.2 fra formelen. Dette gir $A(t) = \pi \cdot 0.2^2 t^2 = 0.04\pi t^2$.

Vi skal finne endringen i areal når det har gått fem sekunder. Endringen i arealet er gitt ved den deriverte til arealfunksjonen. Vi får $A'(t) = 0.08\pi t$, som gir $A'(5) \approx 1.26$. Altså endrer arealet til sirkelen seg med cirka 1.26 kvadrat miles per sekund.

Oppgave 9a:

At vi har $f(x)$ slik at $f'(x) = 12x^2$ betyr at f er en antiderivert til $12x^2$. Vi kan finne alle mulige antideriverte til $f'(x)$ ved ubestemt integrasjon. Vi får

$$\int 12x^2 \, dx = 4x^3 + C.$$

Siden vi ønsker å ha $f(0) = 1$ må vi ha $f(0) = 4 \cdot 0^3 + C = 1$, altså må $C = 1$. Funksjonen f er dermed gitt ved $f(x) = 4x^3 + 1$.

Oppgave 9b:

Vi vil finne integralet av funksjonen vi fant i oppgave 9a over intervallet $[1, 2]$. Vi får

$$\int_1^2 4x^3 + 1 \, dx = [x^4 + x]_{x=1}^{x=2} = (2^4 + 2) - (1^4 + 1) = 16.$$

Oppgave 10a:

Iterasjonsmetoden med fire iterasjoner og startverdi $x_0 = 1$ gir oss

- $x_0 = 1$
- $x_1 = \cos(x_0) \approx 0.5403$

- $x_2 = \cos(x_1) \approx 0.8576$
- $x_3 = \cos(x_2) \approx 0.6543$
- $x_4 = \cos(x_3) \approx 0.7935$

En tilnærmet verdi, ved bruk av iterasjonsmetoden med fire iterasjoner, for x slik at $\cos(x) = x$ er da 0.7935.

Oppgave 10b:

For å bruke Newtons metode må vi skrive om formelen slik at vi kan lete etter et nullpunkt, etter som det er dette Newtons metode gjør. Vi har $\cos(x) = x$ hvis og bare hvis $\cos(x) - x = 0$, så vi kan bruke Newtons metode på funksjonen $f(x) = \cos(x) - x$.

Newtons metode har formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, så vi må vite hva den deriverte til funksjonen vår er. Vi har

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos(x) - x) = -\sin(x) - 1.$$

Ved bruk av Newtons metode får vi da

- $x_0 = 1$
- $x_1 = x_0 + \frac{\cos(x_0) - x_0}{\sin(x_0) + 1} \approx 0.7504$
- $x_2 = x_1 + \frac{\cos(x_1) - x_1}{\sin(x_1) + 1} \approx 0.7391$
- $x_3 = x_2 + \frac{\cos(x_2) - x_2}{\sin(x_2) + 1} \approx 0.7391$
- $x_4 = x_3 + \frac{\cos(x_3) - x_3}{\sin(x_3) + 1} \approx 0.7391$

En tilnærmet verdi, ved bruk av Newtons metode med fire iterasjoner, for x slik at $\cos(x) = x$ er da 0.7391.

Oppgave 10c:

For å finne ut av hvilken metode som ga mest nøyaktig svar kan vi regne ut hvor nærme tilnærmingen er, altså hvor stor er $|\cos(x_4) - x_4|$ for begge tilnærmingene. Jo mindre denne verdien er, jo bedre er tilnærmingen, ettersom vi ønsker å finne en verdi x slik at $\cos(x) = x$.

For iterasjonsmetoden får vi

$$|\cos(x_4) - x_4| \approx 0.09215$$

mens for Newtons metode får vi

$$|\cos(x_4) - x_4| \approx 0.00002488.$$

Altså gir Newtons metode et ganske mye mer nøyaktig svar når vi har brukt samme startverdi, $x_0 = 1$ og samme antall iterasjoner.

Oppgave 11:

Arealet til et rektangel med høyde x og bredde y er gitt ved $A = x \cdot y$. Omkretsen er gitt ved $S = 2x + 2y$, og vi vet fra oppgaveteksten at denne skal være 100 cm. Altså kan vi skrive $100 = 2x + 2y$, som gir $y = 50 - x$. Setter vi dette inn i arealformelen får vi at arealet til R , som en funksjon av x er gitt ved

$$A(x) = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2.$$

Vi ønsker altså å finne verdien for x slik at $A(x)$ er størst mulig, så vi må finne ekstremalpunktene. Disse finner vi ved å undersøke når den deriverte er lik null.

Vi har $A'(x) = 50 - 2x$, og $A'(x) = 0$ når $50 - 2x = 0$ som betyr at $x = 25$.

Dette er et toppunkt til funksjonen $A(x)$ som betyr at det største arealet R kan ha er

$$A(25) = 25 \cdot (50 - 25) = 625 \text{ cm}^2.$$

Fra uttrykket vi hadde for y , altså $y = 50 - x$ betyr dette faktisk at vi har $x = y = 25$, noe som viser at det største mulige arealet et rektangel kan ha med en fiksert radius er når det er et kvadrat!

Oppgave 12:

Vi ønsker å tilnærme $f(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt$ slik at tilnærmingen har feil mindre enn 0.01. Fra formelen for feil for trapesmetoden har vi

$$|f(1) - T(n)| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2} = \frac{M}{12n^2}$$

Vu har fått oppgitt at dersom $g(t) = e^{-t^2}$, altså funksjonen vi ønsker å integrere over intervallet $[0, 1]$, så er $|g''(t)| \leq 2$. Altså kan vi bruke $M = 2$ i feilformelen. Vi får da

$$\frac{M}{12n^2} = \frac{2}{12n^2} < 0.01$$

som gir at

$$n > \sqrt{\frac{100}{6}} \approx 4.08.$$

Altså må vi bruke $n = 5$ delintervaller for å få riktig nøyaktighet.

Vi får da en steglengde $\Delta t = \frac{(b-a)}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$, som gir

- $t_0 = 0$
- $t_1 = 0.2$
- $t_2 = 0.4$
- $t_3 = 0.6$
- $t_4 = 0.8$
- $t_5 = 1$

Ved bruk av trapesmetoden får vi da

$$\begin{aligned} T(5) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta t}{2} (g(t_0) + 2g(t_1) + 2g(t_2) + 2g(t_3) + 2g(t_4) + g(t_5)) \\ &= \frac{1}{5\sqrt{\pi}} \left(e^{-0^2} + 2e^{-0.2^2} + 2e^{-0.4^2} + 2e^{-0.6^2} + 2e^{-0.8^2} + e^{-1^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{5\sqrt{\pi}} (1 + 1.922 + 1.704 + 1.395 + 1.055 + 0.368) \\ &= \frac{1}{5\sqrt{\pi}} \cdot 7.444 \\ &\approx 0.8399 \end{aligned}$$

Altså er funksjonsverdien $f(1) \approx 0.8399$ med feil mindre enn 0.01.