$\boxed{5.2.7}$ Løs likningene:

a) $2.89 = 4.3^x$

b) $0.08 = 0.3^N$

Løsning: a)

$$
\begin{aligned}
2.89 &= 4.3^x \\
\ln 2.89 &= \ln 4.3^x \\
\ln 2.89 &= x \ln 4.3 \\
x &= \frac{\ln 2.89}{\ln 4.3} \\
x &\approx 0.73
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
0.08 &= 0.3^N \\
\ln 0.08 &= \ln 0.3^N \\
\ln 0.08 &= N \ln 0.3 \\
N &= \frac{\ln 0.08}{\ln 0.3} \\
N &\approx 2.1
\end{aligned}
$$

$\boxed{5.3.4}$ En størrelse vokser eksponentielt med 12% per år. Hvor mange prosent vokser den med

a) per tiår?

b) per måned?

c) per dag?

Løsning: Dersom en størrelse vokser med 12% i året, så er vekstfaktoren per år 1.12.

a) Etter ti år har størrelsen vokst med vekstfaktor $1.12^{10} \approx 3.11$. Det tilsvarer en prosentvis økning på 211%.

b) Etter en måned har størrelsen vokst med en vekstfaktor $1.12^{\frac{1}{12}} \approx 1.01$. Det tilsvarer en prosentvis økning på 1%.

c) Etter en dag har størrelsen vokst med en vekstfaktor $1.12^{\frac{1}{365}} \approx 1.0003$. Det tilsvarer en prosentvis økning på 0.03%.

$\boxed{\text{5.B.11}}$ Bakterietallet i en bakteriekoloni øker eksponentielt på en slik måte at antallet bakterier øker med 43% i løpet av 17 minutter. På et gitt tidspunkt er det 1000 bakterier. Hvor mange bakterier er det 13 timer senere?

Løsning: Etter 17 minutter har antallet bakterier økt med en faktor 1.43. Etter 1 time blir vekstfaktoren $1.43^{\frac{60}{17}}$ og etter 13 timer blir da vekstfaktoren

$$(1.43^{\frac{60}{17}})^1 3 = 1.43^{\frac{13\cdot 60}{17}} \approx 1.34 \cdot 10^7.$$

Det betyr at det etter 13 timer er

$$1000 \cdot 1.34 \cdot 10^7 = 1.34 \cdot 10^{10} \text{ bakterier.}$$

$\boxed{\text{5.B.30}}$ Et tjern har et vanninnhold på $1000\,\mathrm{m}^3$. På grunn av mye regn øker volumet i tjernet med 15% per time. Volumet etter t timer kaller vi $V(t)$.

a) Sett opp utrykket for $V(t)$, og forklar utrykket ditt.

b) Hvor lang tid tar det før innholdet i tjernet er fordoblet?

Løsning: a) Vekstfaktoren etter 1 time blir 1.15^1, mens den etter 2 timer blir 1.15^2 og etter 3 blir 1.15^3 osv. Startinnholdet er $1000\,\mathrm{m}^3$. Kombinert får vi uttrykket

$$V(t) = 1000 \cdot 1.15^t.$$

b) Innholdet i tjernet er fordoblet når $V(t) = 2V(0)$ Vi løser ligningen:

$$\begin{aligned}
V(t) &= 2V(0)\\
1000 \cdot 1.15^t &= 2000\\
1.15^t &= 2\\
\ln 1.15^t &= \ln 2\\
t \ln 1.15 &= \ln 2\\
t &= \frac{\ln 2}{\ln 1.15}\\
t &\approx= 4.96.
\end{aligned}$$

Innholdet i tjernet er altså fordoblet etter nesten 5 timer.

$\boxed{5}$ Løs likningen

$$25^{-2x} = 125^{x+7}.$$

Løsning:

$$
\begin{aligned}
25^{-2x} &= 125^{x+7} \\
\ln 25^{-2x} &= \ln 125^{x+7} \\
-2x \ln 25 &= (x+7) \ln 125 \\
-2x &= (x+7) \frac{\ln 125}{\ln 5} \\
-2x &= \frac{3x}{2} + \frac{21}{2} \\
x(-2 - \frac{3}{2}) &= \frac{21}{2} \\
x &= \frac{21}{2(-2-\frac{3}{2})} \\
x &= -3.
\end{aligned}
$$

Vi kan også løse lignignen uten kalkulator og logaritmer ved å observere at $25 = 5^2$, mens $125 = 5^3$:

$$
\begin{aligned}
25^{-2x} &= 125^{x+7} \\
(5^2)^{-2x} &= (5^3)^{x+7} \\
5^{-4x} &= 5^{3x+21}.
\end{aligned}
$$

Siden grunntallet er det samme, så må eksponenten være lik for at ligningen skal være riktig:

$$
\begin{aligned}
-4x &= 3x + 21 \\
-7x &= 21 \\
x &= -3.
\end{aligned}
$$

$\boxed{6}$ Som i forelesningen lar vi I_0 være forholdet mellom Karbon-14 og Karbon-12 i et levende materiale. Vi vet at dette forholdet avtar eksponentielt med en halveringstid på 5730 år i et dødt organisk materiale. Ved et mirakuløst funn har en person i en liten lokal befolkning i Hellas funnet noe han hevder er en nedskriving av Odysseen, skrevet på 900-tallet før vår tidsregning. Dersom dette er sant motstrider det hva vi tror om både gresk språk og Homer som forfatter av verket. Det blir gjort en Karbon-14 måling som resulterer i et forhold mellom Karbon-14 og Karbon-12 på $I = 75\%$ av I_0. Avgjør om påstanden har mulighet for å være sann eller ikke.

Løsning:

900-tallet før vår tidsregning er ca 2900 år siden. Derfor forventer vi at forholdet mellom Karbon-14 og Karbon-12 er

$$
I = (0.5)^{\frac{2900}{5730}} \cdot 100\% \text{ av } I_0 = 70.4\% \text{ av } I_0.
$$

Dette tyder på at funnet er feil, I har avtatt for mye. Vi kan også se på problemet andre veien. La x være antall år I har avtatt for å bli 75% av I_0. Vi finner x ved å løse ligningen:

$$0.5^{\frac{x}{5730}} = 0.75$$
$$x = 5730 \cdot \frac{\ln 0.75}{\ln 0.5}$$
$$x = 2378.$$

Dette tilsvarer rundt 350 år før vår tidsregning, altså betydelig senere.