Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 6

4.1.4.b) Bruk analogier med definisjonene i teksten (eller forelesningen) til å angi en presis definisjon av grensen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Merk at vi gjorde lignende definisjone i forelesning, så det er mulig å ta litt inspirasjon derfra.

Løsning:

For hvert tall $L > 0$ så finnes et tall $M > 0$ slik at for alle $x \in D_f$ så har vi at

$$x > M \quad \text{medfører} \quad f(x) > L.$$

4.2.2 La f være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 4x - x^3 - 2, & x < 1 \end{cases}$$

a) Finn $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ og $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

b) Er f kontinuerlig i $x = 1$? Begrunn svaret.

Løsning:

a) Vi finner $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ved å sette inn 1 i funksjonesuttrykket for $x \geq 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = x^2|_{x=1} = 1^2 = 1.$$

Vi finner $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ved å sette inn 1 i funksjonesuttrykket for $x < 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = (4x - x^3 - 2)|_{x=1} = 4 \cdot 4 - 1^3 - 2 = 1.$$

b) Siden $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, så er funksjonen kontinuerlig i punktet $x = 1$.

4.2.3 Finn eventuelle horisontale og vertikale asymptoter til funksjonen, og skisser grafen,

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x-5}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{|x|}$

Løsning:

a) For å finne horisontale asymptoter, regner vi ut $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1-0} = 3,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{1-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{1+0} = 3.$$

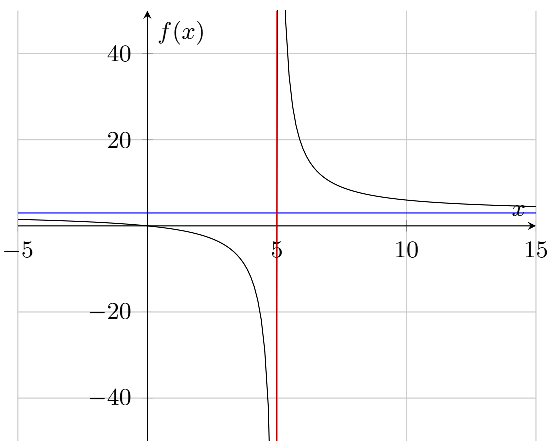
Vi ser at $y = 3$ er en horisontal asymptote.

Den eneste muligheten for en vertikal asymptote er når telleren er 0, altså når $x = 5$. Vi undersøker grenseverdiene:

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+} \frac{3x}{x-5} == \infty,$$
$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} \frac{3x}{x-5} == -\infty.$$

Vi ser at $x = 5$ er en vertikal asymptote.

Figuren under viser $f(x)$ og asymptotene i rødt og blått.



b) På samme måte som i a) regner vi ut $\lim_{x\to\infty} g(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ for å finne horisontale asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|} = 0.$$

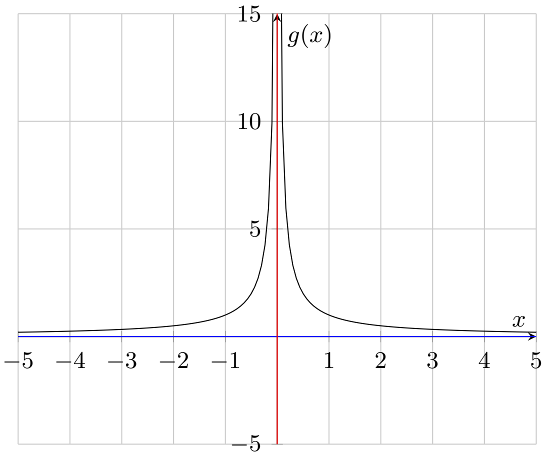
Vi ser at det er en horisontal asymptote i $y = 0$.

Den eneste muligheten for en vertikal asymptote er i $x = 0$. Vi undersøker grenseverdiene:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = \infty.$$

Vi ser at det må være en vertikal asymptote i $x = 0$.

Figuren under viser $g(x)$ og asymptotene i rødt og blått.



$\boxed{4.2.7}$ I en matematisk modell for forurensning i en innsjø er en kommet frem til at giftmengden $g(t)$ ved tid t er gitt ved

$$g(t) = \frac{10t^2}{(2t+3)^2},$$

der g måles i kg og t i døgn. Forskerene konkluderer ut fra dette med at giftmengden i vannet ifølge modellen vil stabilisere seg på ca. 2.5 kg i det lange løp. Beskriv hvordan de har kommet frem til dette.

Løsning:

Giftemengden stabiliserer seg over tid hvis grenseverdien til $g(t)$ går mot en fast verdi når t vokser. Vi undersøker derfor $\lim_{t\to\infty} g(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{10t^2}{(2t+3)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{10t^2}{4t^2+12t+9} = \lim_{t\to\infty} \frac{10}{4+\frac{12}{t}+\frac{9}{t^2}} = \frac{10}{4} = 2.5.$$

Dette stemmer overens med konklusjonen til forskerne.

$\boxed{5}$ For hvilke verdier er funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4}$$

kontinuerlig?

Løsning:

Ettersom polynomet i telleren er en kontinuerlig funksjon, er de eneste punktene hvor f eventuelt ikke er kontinuerlig når nevneren er lik 0.

Vi faktoriserer nevneren:

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1).$$

Alså er nevneren 0 når $x=-4$ og når $x=1$. Vi undersøker grenseverdiene i disse punktene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-4^+} \frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to-4^+} \frac{x^2+3x+5}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x\to-4^+} \frac{9}{-5(x+4)} = -\infty, \\
\lim_{x\to-4^-} \frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to-4^-} \frac{x^2+3x+5}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x\to-4^-} \frac{9}{-5(x+4)} = \infty, \\
\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+3x+5}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{9}{5(x-1)} = \infty, \\
\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+3x+5}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{9}{5(x-1)} = -\infty.
\end{aligned}$$

Ettersom $\lim_{x\to-4^+} f(x) \neq \lim_{x\to-4^-} f(x)$ og $\lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$, så er $f(x)$ ikke kontinuerlig i disse punktene.

Vi konkluderer med at f er kontinuerlig på $(-\infty,-4)\bigcup(-4,1)\bigcup(1,\infty)$.

$\boxed{6}$ La

$$f(x) = \begin{cases} a+bx, x>2 \\ 3, x=2 \\ b-ax^2, x<2. \end{cases}$$

Finn verdier til a og b slik at f er kontinuerlig.

Løsning:

Ettersom $a+bx$ og $b-ax^2$ er kontinuerlige funksjoner, så er f kontinuerlig dersom den er kontinuerlig i overgangen mellom de ulike uttrykkene. Vi ønsker derfor å finne a,b slik at

$$\lim_{x\to2^+} a+bx = 3 = \lim_{x\to2^-} b-ax^2.$$

Ved å regne ut grenseverdiene i ligningen over, så finner vi at a, b må tilfredsstille ligningssettet

$$\begin{aligned} a + 2b &= 3 \\ b - 4a &= 3. \end{aligned}$$

Vi løser ligningsettet ved addisjonsmetoden (det er selvfølgelig også mulig å bruke innsettingsmetoden): Vi ganger den første ligningen med 4 og adderer de to ligningene. Leddene med a vil da kansellere hverandre ut og vi får

$$9b = 15.$$

Altså må $b = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$. Ved å sette inn dette i den første lignignen igjen finner vi at

$$a = 3 - 2b = \frac{9}{3} - \frac{10}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Vi konkluderer med at $f(x)$ er kontinerlig dersom $a = -\frac{1}{3}$ og $b = \frac{5}{3}$.