Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

2.2.1 La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x}, \quad D_f = (0, \infty).$$

a) Hva skjer med $f(x)$ når x nærmer seg 0?

b) Vis at f er injektiv. Finn V_f.

c) Finn den inverse funksjonen f^{-1} til f. Angi definisjonsmengde og verdimengde for f^{-1}.

d) Hva skjer med f^{-1} når x blir stor?

e) Tegn grafene til f og f^{-1} på samme figur.

f) Vis at $f^{-1}(f(x)) = x$ for alle $x \in D_f$, og så at $f(f^{-1}(x)) = x$ for alle $x \in V_f$.

Løsning:

a) Når x nærmer seg 0, så til $f(x)$ vokse mot uendelig.

b) La $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$. Hvis $y_1 = y_2$, så er eneste mulighet at $x_1 = x_2$, siden

$$3 + \frac{1}{x_1} = 3 + \frac{1}{x_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_2 = x_1.$$

Alternativt kan man se at f er strengt voksende for alle $x \in D_f$, noe som innebærer at f er injektiv.

Verdimengden V_f er alle verdiene $f(x)$ kan ta når vi putter inn en x fra definisjonsmengden D_f. Ved å sette x høyere og høyere, så kan vi få $f(x)$ vilkårlig nærme 3. Ved å sette x nærme 0, så kan man få $f(x)$ vilkårlig høyt. Ingen $x \in D_f$ gir $f(x) \leq 3$. Derfor er verdimengden

$$V_f = (3, \infty).$$

c) Siden f er injektiv, så finnes den inverse funksjonen f^{-1}. Vi finner f^{-1} ved å snu ligningen for $y = f(x)$:

$$
\begin{aligned}
y &= 3 + \frac{1}{x} \\
y - 3 &= \frac{1}{x} \\
x &= \frac{1}{y-3}.
\end{aligned}
$$

Altså er den inverse funksjonen

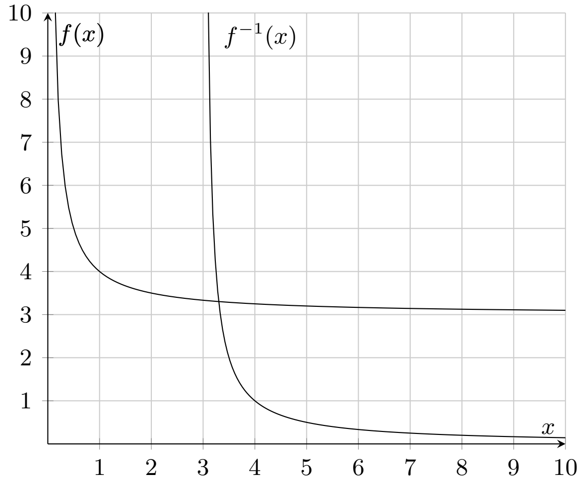
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x-3}.$$

Definisjonsmengden og verdimengden til f^{-1} blir motsatt av for f, altså:

$$
\begin{aligned}
D_{f^{-1}} &= (3, \infty), \\
V_{f^{-1}} &= (0, \infty).
\end{aligned}
$$

d) Når x blir stor, så vil f^{-1} bli mindre og mindre og gå mot 0.

e)



f) La $x \in D_f$. Da er

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f(x)-3} = \frac{1}{3+\frac{1}{x}-3} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

La $x \in V_f$. Da er

$$f(f^{-1}(x)) = 3 + \frac{1}{f^{-1}(x)} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{x-3}} = 3 + x - 3 = x.$$

$\boxed{2}$ Finn den inverse funksjonen g^{-1} til

$$g(x) = \frac{6-10x}{8x+7}.$$

Sjekk at dette faktisk er inverse ved å regne ut $g^{-1}(g(x))$ og $g(g^{-1}(x))$.

Løsning: Finner den inverse funksjonen ved å snu ligningen for $y = g(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{6-10x}{8x+7} \\ 8yx + 7y &= 6 - 10x \\ x(8y+10) &= 6 - 7y \\ x &= \frac{6-7y}{8y+10}. \end{aligned}$$

Den inverse blir da

$$g^{-1}(x) = \frac{6-7x}{8x+10}.$$

Vi sjekker at dette faktisk er den inverse:

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(x)) &= \frac{6-7g(x)}{8g(x)+10} = \frac{6-7\cdot(\frac{6-10x}{8x+7})}{8\cdot(\frac{6-10x}{8x+7})+10} = \frac{6(8x+7)-7(6-10x)}{8(6-10x)+10(8x+7)} \\ &= \frac{48x+42-42+70x}{48-80x+80x+70} = \frac{118x}{118} = x. \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} g(g^{-1}(x)) &= \frac{6-10g^{-1}(x)}{8g^{-1}(x)+7} = \frac{6-10\cdot(\frac{6-7x}{8x+10})}{8\cdot(\frac{6-7x}{8x+10})+7} = \frac{6(8x+10)-10(6-7x)}{8(6-7x)+7(8x+10)} \\ &= \frac{48x+60-60+70x}{48-56x+56x+70} = \frac{118x}{118} = x. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Vi har to funksjoner f og g med inverser f^{-1} og g^{-1} slik at

$$g^{-1}(2) = 6, \quad g(3) = 4, \quad f^{-1}(-2) = 4, \quad f(3) = 6, \quad f^{-1}(9) = 2.$$

Hva er $f(g(f^{-1}(6)))$?

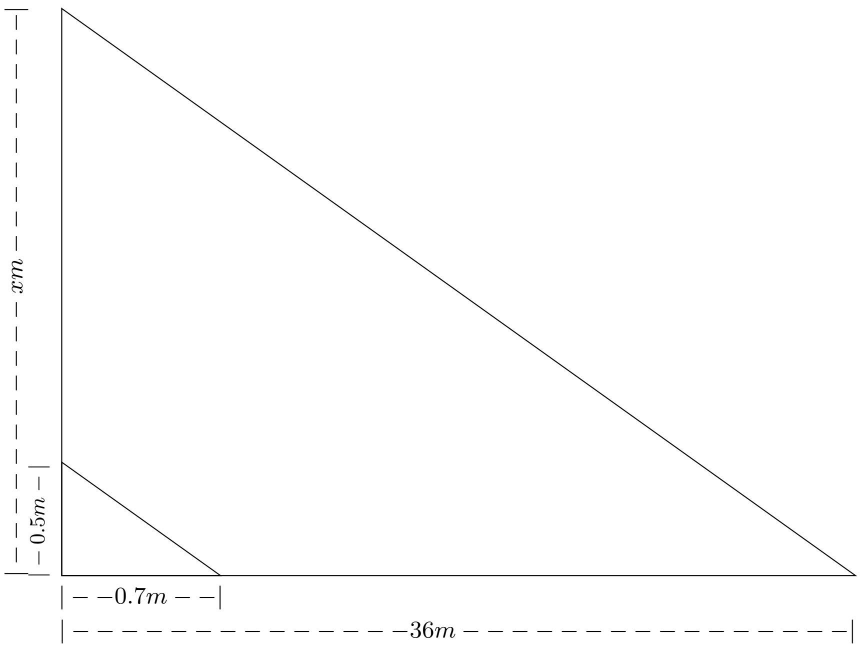
Løsning:

Observer først at $f(3) = 6$ betyr at $f^{-1}(6) = 3$ og motsatt at $f^{-1}(-2) = 4$ betyr at $f(4) = -2$. Da får vi

$$f(g(f^{-1}(6))) = f(g(f^{-1}(6))) = f(g(3)) = f(4) = -2.$$

$\boxed{3.3.6}$ En lysmast står ved kanten av en fotballbane. For å finne ut hvor høy masten er, tar du med deg en 50 cm lang stokk og måler at denne kaster en skygge på 70 cm når den står rett opp på flatt underlag. Samtidig kaster lysmasten en 36 m lang skygge på den flate fotballbanen. Hvor høy er masten?

Masten/stokken, skyggene og bakken vil danne to formlike trekanter, se figur (merk at figuren ikke skalerer riktig).



Forholdet mellom sidene i den lille trekanten er dermed likt som forholdet mellom sidene i den store trekanten. Vi finner

$$\frac{x}{36} = \frac{0.5}{0.7}$$
$$x = \frac{36 \cdot 0.5}{0.7}$$
$$x \approx 25.7.$$

Altså er masten omtrent $25.7m$ høy.

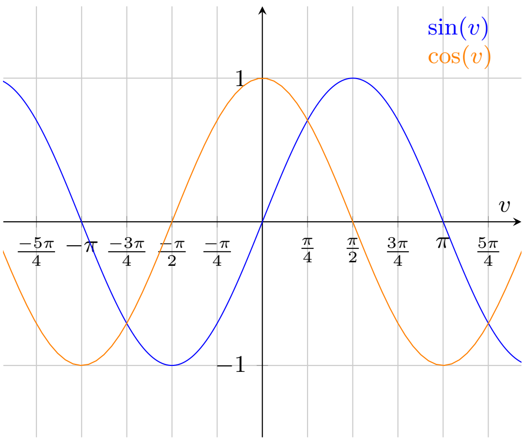
$\boxed{3.B.6}$ Finn det største intervallet som inneholder 0 og er slik at funksjonen er strengt voksende i intervallet

a) $\sin v$

b) $\cos v$

En funksjon er strengt voksende på intervallet $[a, b]$ dersom

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ for alle } x_1, x_2 \in [a, b].$$

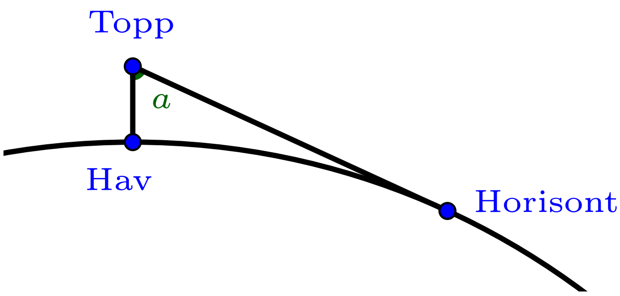


Det største intervallet som inneholder 0 hvor det holder blir da:

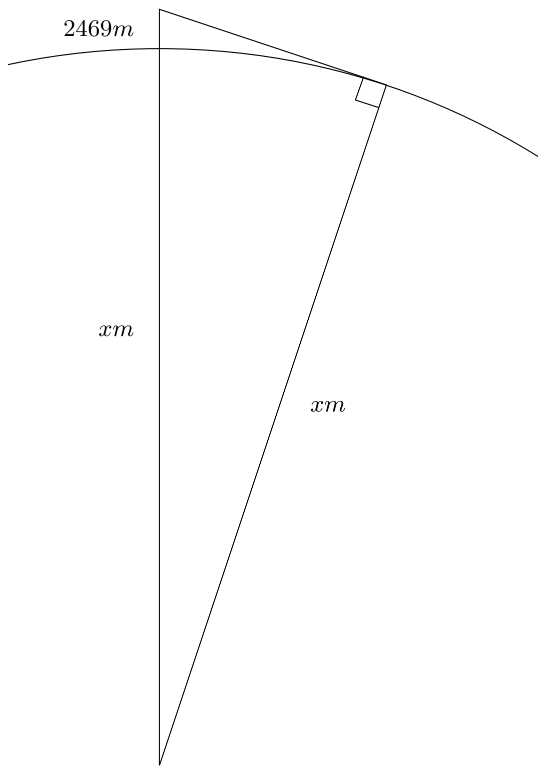
a) $[-\pi/2, \pi/2]$

b) $[-\pi, 0]$ eller $[0, \pi]$

$\boxed{6}$ Under en tur til toppen av Galdhøpiggen bestemmer du deg for å prøve å regne ut radiusen til jorda. Når du kommer til toppen måler du vinkelen a i bildet under til å være 88.41°. Hva er jordas radius?



Løsning:



Galdhøpiggen er $2469m$ høy.

Vi får en rettvinklet trekant der hypotenusen har lengde $x + 2469$ og den lengste kateten har lengde x, der x er radius til jorda.

Vi vet at vinkelen ved toppen er $a = 88.41$ grader og at

$$\sin(a) = \frac{\text{lengde av motstående katet}}{\text{lengde av hypotenus}}$$

Derforkan vi løse ligninen under for x.

$$\begin{gathered}
\sin(88.41) = \frac{x}{x + 2469} \\
x \sin(88.41) + 2469 \sin(88.41) = x \\
x(1 - \sin(88.41)) = 2469 \sin(88.41) \\
x = \frac{2469 \sin(88.41)}{1 - \sin(88.41)} \\
x = 6410069
\end{gathered}$$

Det vil si at jordas radius er omtrent $6410km$.