Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Løsningsforslag — Øving 2**

$\boxed{1.11.5}$ Finn ligningen for den rette linjen som går gjennom punktet $(2,3)$ og har stigningstall lik 1. Finn linjens skjæringer med aksene og tegn den.

**Løsning:** Ligning for en rett linje er på formen

$$y = ax + b,$$

der $a$ er stigningstall og $b$ er skjæringspunktet med $y$-aksen. Vi vet at $a = 1$ og at punktet $(2,3)$ er på linjen. Vi setter inn dette og ser at

$$3 = 2 + b,$$

slik at $b = 1$.

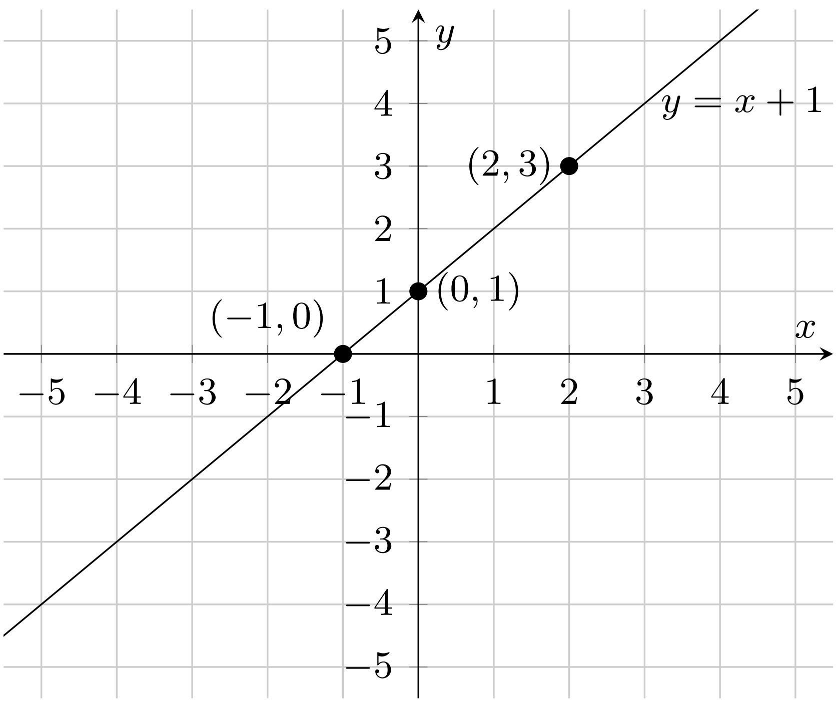
Dermed er ligningen for linja:

$$y = x + 1$$

Skjæringspunktet med $y$-aksen er punktet $(0,1)$. For å finne skjæringspunktet med $x$-aksen, så setter vi inn $y = 0$ i ligningen for linja.

$$0 = x + 1,$$

som gir at $x = -1$. Dermed må skjæginspunktet med $x$-aksen være i punket $(-1,0)$.



**2.1.10** La $p$ og $q$ være gitte tall slik at $p^2 > 4q$. Ligningen

$$x^2 + px + q = 0$$

har da nøyaktig to løsninger, $x_1$ og $x_2$. Vis at vi har

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{og} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

**Løsning:** Vi setter inn i formelen for løsning av annengradsligning. De to løsningene er

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ og}$$
$$x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Dermed blir

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q} + -p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

og

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p + \sqrt{p^2 - 4q})(-p - \sqrt{p^2 - 4q})}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = q.$$

**2.4.1** Vi vet at 0° Celsius tilsvarer 32° Fahrenheit, og at 100° Celsius tilsvarer 212° Fahrenheit. Celsius-skalaen og Fahrenheit-skalaen er begge lineære skalaer. La $x$ være temperaturen i Celsius og $y$ være temperaturen i Fahrenheit. Utled en formel for $y$ som en funksjon av $x$.

**Løsning:** La $y$ være temperaturen i Fahrenheit og $x$ være temperaturen i Celcius. Vi vil finne en sammenheng på formen

$$y = ax + b.$$

Vi setter først inn $(x, y) = (0, 32)$ og finner at

$$b = 32.$$

Deretter setter vi inn $(x, y) = (100, 212)$ og finner at

$$212 = a \cdot 100 + 32.$$

Vi løser ligningen for å finne a:

$$a = \frac{212 - 32}{100} = \frac{9}{5}.$$

Vi setter inn i $y = ax + b$ og finner ligningen

$$y = \frac{9x}{5} + 32.$$

$\boxed{\text{2.B.3}}$ *Flytting av grafer.* I denne oppgaven skal vi studere hvilken effekt det har på grafen til en funksjon at vi endrer funksjonsutrykket på noen spesielle måter. Det er meningen du skal skissere på frihånd, uten kalkulator. Kvalitativ forståelse er poenget her.

**a)** Skisser grafen til $f(x) = x^2$.

**b)** Skisser grafen til $f(x) = x^2 + 3$. Hvilken effekt hadde det på grafen at vi la til 3 i funksjonsutrykket?

**c)** Skisser grafen til $f(x) = x^2 - 4$.

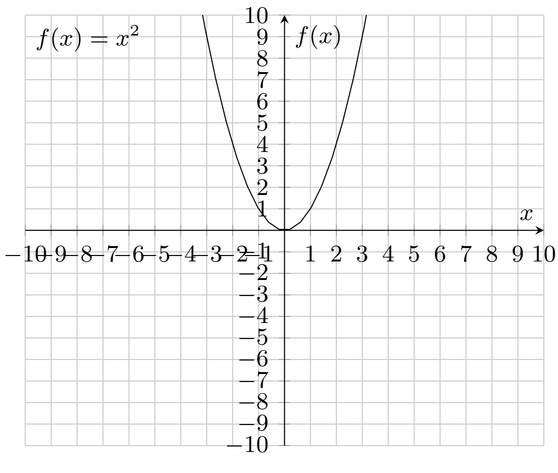
**d)** Skisser grafen til $f(x) = 2x^2$. Hvilken effekt hadde det at vi ganget med 2?

**e)** Skisser grafen til $f(x) = -x^2$. Hvilken effekt hadde det at vi satte et minustegn forran funksjonsutrykket?

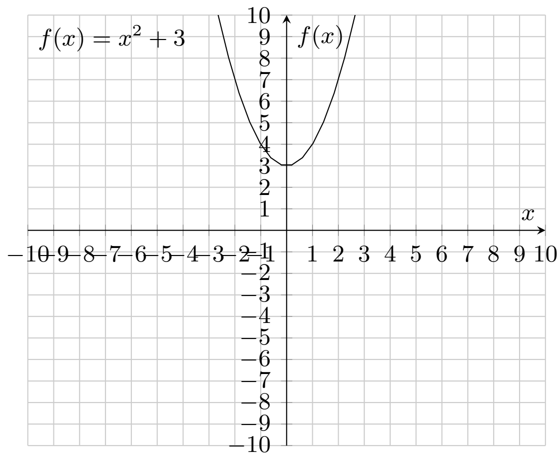
**f)** Skisser grafen til $f(x) = (x-5)^2$. Hint: Regn ut $f(5)$. Hvilken effekt hadde det på grafen at vi erstattet $x$ med $x - 5$?

**g)** Skisser grafene til $f(x) = -(x-5)^2$, $f(x) = -2(x-5)^2$ og $f(x)4 - (x-5)^2$.

**Løsning:**

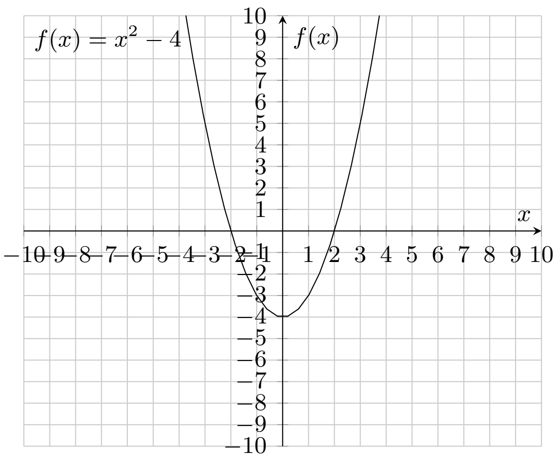



a)

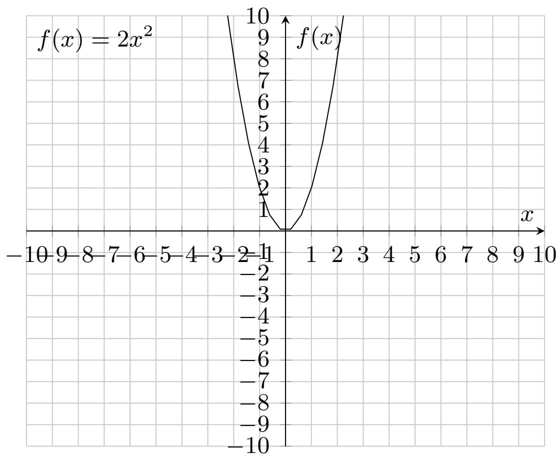



b)

I oppgave *b)* ser vi at grafen flyttes 3 hakk oppover når vi legger til 3 i funksjonsuttrykket.

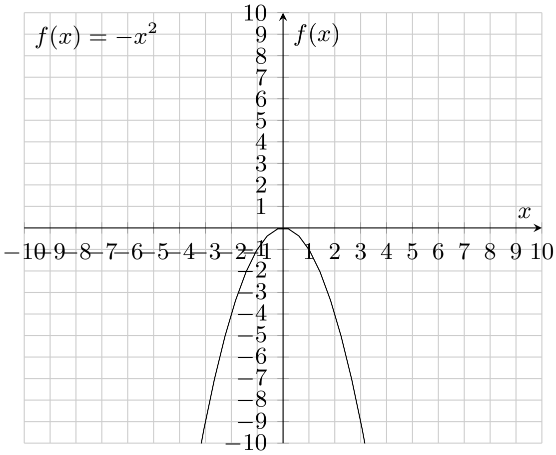



c)

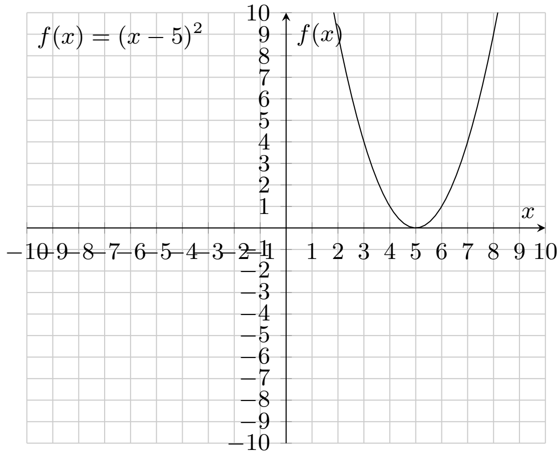



d)

I oppgave $d$) ser vi at grafen vokser (avtar for negative $x$) dobbelt så fort når vi ganger funksjonsuttrykket med 2.



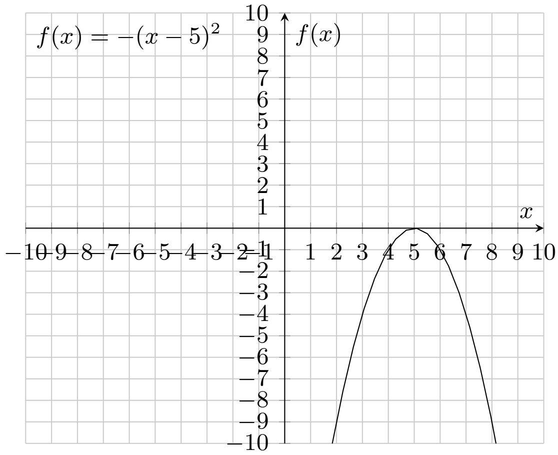

**e)**

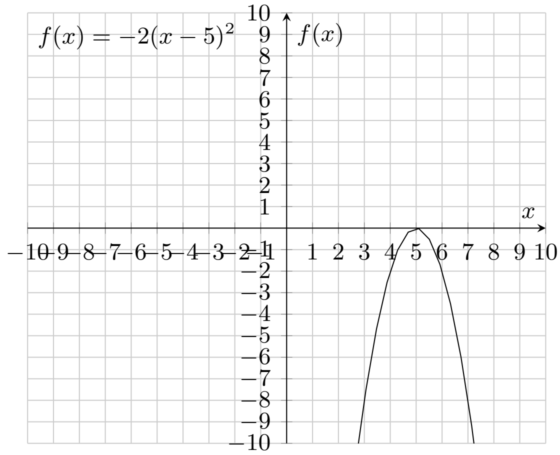



**f)**

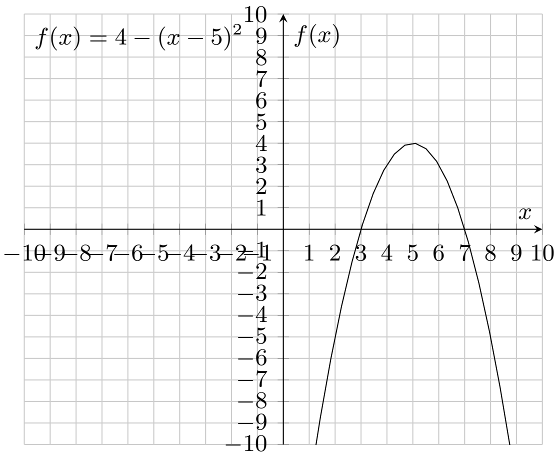
I oppgave $e$) ser vi at grafen skifter fortegn og speilvendes om $x$-aksen.

For oppgave $f$) finner vi at $f(5) = 0$. Sammneligner vi med $a$), så vil det si at bunnpunktet er flyttet 5 hakk bortovover langs $x$-aksen.




**g)**



$\boxed{5}$ Sigurd er en professionell fridykker. Under et dykk beskrives dybden (relativ til havoverflaten) han befinner seg på etter $t$ sekunder med funksjonen

$$d(t) = \frac{1}{2}t^2 - 10t.$$

Hvor mange sekunder tar det før Sigurd når det dypeste punktet i løpet av dykket? Hvor dypt når han?

**Løsning:**

Vi ser at funksjonen har et minimumspunkt siden koeffisienten foran $t^2$ er positiv $(1/2 > 0)$. Bunnpunktet befinner seg på symmetrilinjen, hvor

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 10.$$

Det tar altså $t = 10$ sekunder før Sigurd når det dypeste punktet i løpet av dykket. Da kan vi finne dybden ved å sette inn i funksjonsuttrykket:

$$d(10) = \frac{1}{2} \cdot (10)^2 - 10 \cdot 10 = 50 - 100 = -50.$$

Sigurd når altså ned til 50 meter dyp.

$\boxed{6}$ Ole Martin står på kaia i Trondheim og kaster en stein ut i havet. Steinens høyde, målt i meter over havet, etter $t$ sekunder beskrives av funksjonen

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15.$$

Hvor mange sekunder etter at steinen ble kastet treffer den vannoverflaten? Hvor høyt er steinen når den når sitt høyeste punkt?

**Løsning:**

Steinen vil treffe vannoverflaten når høyden (målt i meter over havet) er lik 0. Vi setter inn $h(t) = 0$ i uttrykket:

$$0 = -5t^2 + 10t + 15.$$

Vi finner to løsninger:

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 + 20}{-10} = -1, \tag{1}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 - 20}{-10} = 3. \tag{2}$$

Altså treffer steinen vannoverflaten 3 sekunder etter den ble kastet.

Steinen når sitt høyeste punkt mellom de to nullpunktene (et annengradspolynom gir en symetrisk kurve):

$$t_{topp} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Da er høyden:

$$h(t_{topp}) = -5 \cdot 1^2 + 10 \cdot t + 15 = -5 + 10 + 15 = 20$$

meter over havet.