MA0001 – Brukerkurs i matematikk A
Høst 2022

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 11

$\boxed{\text{7.4.4}}$ Finn integralene under.

b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(7x^4-5)^5}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

Løsning: b) Vi bruker substitusjonen $u = 7x^4 - 5$. Da blir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 28x^3$. Vi setter inn dette:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(7x^4-5)^5}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3}{u^5}\frac{\mathrm{d}u}{28x^3} \\
&= \frac{1}{28}\int u^{-5}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{28\cdot 4}u^{-4} + C \\
&= -\frac{1}{112\cdot(7x^4-5)^4} + C.
\end{aligned}$$

e) Vi bruker substitusjonen $u = x^3 + 1$. Da blir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$. Vi må også endre grensene: $0 \mapsto 1$ (fordi $0^3 + 1 = 1$) og $1 \mapsto 2$ (fordi $1^3 + 1 = 2$). Vi setter inn dette:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 x^2u^9\frac{\mathrm{d}u}{3x^2} \\
&= \frac{1}{3}\int_1^2 u^9\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{30}u^{1}0|_1^2 \\
&= \frac{1}{30}(2^{10}-1).
\end{aligned}$$

h) Vi bruker substitusjonen $u = t^2 - 1$. Da blir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2t$. Vi setter inn dette:

$$\begin{aligned}
\int t\sqrt{t^2+1}\ \mathrm{d}t &= \int t\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{2t} \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}u^3/2 + C \\
&= \frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.4.12}}$ Bruk substitusjonen $u = 1 - x$ til å vise at

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} + C_1,$$

der C_1 er en integrasjonskonstant. Vis så ved derivasjon av høyre side at

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{1-x} + C_2,$$

der C_2 er en integrasjonskonstant. Forklar hvorfor dette er mulig.

Løsning: Med $u = 1 - x$ blir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1$ og dermed

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1-x)^2}\ \mathrm{d}x &= -\int u^{-2}\ \mathrm{d}u \\
&= u^-1 + C_1 \\
&= \frac{1}{1-x} + C_1.
\end{aligned}$$

Vi viser nå den andre ligningen ved bruk av derivasjon:

$$\begin{aligned}
(\frac{x}{1-x} + C_2)' &= (x)'\cdot\frac{1}{1-x} + x\cdot(\frac{1}{1-x})' + (C_2)' \\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}. \\
&= \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

Integrating both sides gived what we want.

Based on this, it would seem that there are two different solutions for the integral. However, the difference between the expressions is constant and can hence be incorporated inthe generic constants C_1 and C_2:

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

$\boxed{7.5.1}$ Finn integralene.

a) $\int x\cos(x)\ \mathrm{d}x$

e) $\int x\ln(x)\ \mathrm{d}x$

g) $\int_0^1 xe^{-x}\ \mathrm{d}x$

Løsning: I alle deloppgavene vil vi bruke delvis integrasjon:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x.$$

a) Vi setter $u(x) = x, v'(x) = \cos(x)$. Da blir $u'(x) = 1, v(x) = \sin(x)$. Det gir

$$\int x\cos(x)\ \mathrm{d}x = x\sin(x) - \int \sin(x)\ \mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

e) Vi setter $u(x) = \ln(x), v'(x) = x$. Da blir $u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{1}{2}x^2$. Det gir

$$\int x\ln(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(\ln(x) - \frac{1}{2}) + C.$$

g) Vi setter $u(x) = x, v'(x) = e^{-x}$. Da blir $u'(x) = 1, v(x) = -e^{-x}$. Det gir

$$\int_0^1 xe^{-x}\ \mathrm{d}x = -xe^{-x}|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ \mathrm{d}x = -e^{-1} - e^{-x}|_0^1 = -2e^{-1} + 1$$

$\boxed{7.5.2}$ I denne oppgaven skal vi se på en variant av delvis integrasjon som ofte kalles "I-metoden". Vi skal bruke den til å finne integralet

$$\int e^x\sin(x)\ \mathrm{d}x.$$

a) Bruk delvis integrasjon med $F(x) = e^x$ og $G'(x) = \sin(x)$ til å vise at

$$\int e^x\sin(x)\ \mathrm{d}x = -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\ \mathrm{d}x.$$

b) Bruk delvis integrasjon enda en gang, med $F(x) = e^x$ og $G'(x) = \cos(x)$, til å vise at hvis vi kaller vårt opprinnelige integral I, så er

$$I = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - I.$$

c) Finn I ved å løse ligningen over.

Løsning: **a)** Med $F(x) = e^x$ og $G'(x) = \sin(x)$ får vi at $F'(x) = e^x, G(x) = -\cos(x)$. Hvis vi setter inn dette i formelen for delvis integrasjon, så får vi direkte det vi skal vise.

b) Med $F(x) = e^x$ og $G'(x) = \cos(x)$ blir $F'(x) = e^x, G(x) = \sin(x)$. Vi bruker delvisintegrasjon på integralet på høyresiden i oppgave a):

$$\int e^x \cos(x)\ \mathrm{d}x = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\ \mathrm{d}x.$$

Hvis vi nå kaller det originale integralet for I og setter sammen a) og b), så finner vi at

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - I. \end{aligned}$$

c) Vi løser ligningen:

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - I \\ 2I &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \\ I &= \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.7.2.a}}$ Finn integralet $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$ med feil mindre enn 0.01 ved å bruke trapesmetoden.

Løsning: Vi må velge n så stor at feilen garantert blir mindre enn 0.01. Feil for trapesmetoden er gitt ved

$$E_{trapes} = \frac{(b-a)\cdot |f''(c)|}{12n^2} \quad \text{for en } c \in [a, b],$$

der a, b er endepunktene. Det innebærer at

$$E_{trapes} \leq \frac{(b-a)\cdot \max_{c\in[a,b]}|f''(c)|}{12n^2} \quad \text{for en } c \in [a, b].$$

Vi finner den dobbeltderiverte til f:

$$f''(x) = (\frac{1}{x})'' = (-\frac{1}{x^2})' = \frac{2}{x^3}.$$

På intervallet $[1, 2]$ er dette uttrykket størst når $x = 1$ (fordi x står i nevneren). Da er $f''(1) = 2$. Vi vet altså at

$$E_{trapes} \leq \frac{(2-1)\cdot 2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Vi finner n slik at dette er mindre enn 0.01:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6n^2} &\leq 0.01 \\ 6\cdot 0.01n^2 &\geq 1 \\ n^2 &\geq \frac{100}{6} \\ n &\geq 4.08. \end{aligned}$$

Siden n må være et helt tall, ser vi at vi må velge $n = 5$ for å være sikker på feilen blir mindre enn 0.01.

Vi kan nå bruke trapesmetoden med $n = 5$:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] \\
&= \frac{1}{2\cdot 5}[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 2\sum_{i=1}^{5-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}] \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2} + 2\cdot(\frac{1}{1+\frac{1}{5}} + \frac{1}{1+\frac{2}{5}} + \frac{1}{1+\frac{3}{5}} + \frac{1}{1+\frac{4}{5}})}{2\cdot 5} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2} + 2\cdot(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8})}{10} \\
&\approx 0.696.
\end{aligned}$$

Det eksakte svaret er 0.69315 altså er feilen $E_{trapes} \approx 0.696 - 0.69315 \approx 0.003$ som er mye mindre enn 0.01.