



Norwegian University of
Science and Technology

Department of Mathematical Sciences

Examination paper for **MA0001 Brukerkurs i Matematikk A**

Academic contact during examination: Agamemnon Zafeiropoulos^a, Karl Kristian Brustad^b

Phone: ^a 984 69699, ^b 98 88 37 71

Examination date: 13 December 2021

Examination time (from–to): 09:00 - 13:00

Permitted examination support material: D: No printed or hand-written support material is allowed. A specific basic calculator is allowed.

Language: English

Number of pages: 2

Number of pages enclosed: 0

Checked by:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig 2-sidig

sort/hvit farger

skal ha flervalgskjema

Date

Signature

Problem 1 Find the derivative of the function

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Problem 2 Find the equation of the tangent line of the graph of the function

$$g(x) = x \sin x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

at the point $(0, g(0))$.

Problem 3 Let

$$f(x) = xe^{-x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Find the second degree Taylor polynomial of f at the point $x_0 = 0$.

Problem 4 Evaluate the integral

$$\int_0^1 (2^x + \sqrt{x}) dx.$$

Problem 5 Find the equation of the tangent line of the hyperbola

$$\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$$

at the point $(1, 2)$.

Problem 6 Find the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^4}.$$

Problem 7 Prove that the equation

$$x^7 + 3x^4 - x^2 - 2 = 0$$

has at least one solution in the interval $(0, 1)$. Justify your answer.

Problem 8 Let

$$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Find the intervals where h is monotonic. Find all global and local extrema of h (maxima and minima).

Problem 9 Find the value of $a > 0$ such that

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = 1.$$

Problem 10 Find the area of the bounded domain of the 2-dimensional plane that is surrounded by the graph of the function $f(x) = x^2$, the line with equation $y = 2 - x$ and the horizontal axis. Draw a sketch.

Regneregler for potenser. For $a > 0$ er

$$\bullet a^x a^y = a^{x+y} \quad \bullet \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \bullet (a^x)^y = a^{xy} \quad \bullet a^x = e^{x \ln(a)}$$

Regneregler for logaritmer. For $x, y > 0$ er

$$\bullet \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \bullet \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y) \quad \bullet \ln(x^a) = a \ln(x)$$

Verdier av Trigonometriske Funksjoner.

$$\begin{array}{ccccc} \sin 0 = 0 & \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos 0 = 1 & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array}$$

Trigonometriske identiteter.

$$\bullet \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \bullet \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \bullet \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

Ligning til en sirkel. Ligningen til en sirkel med sentrum (a, b) og radius $r > 0$ er $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Tangentligner. Ligningen for tangentlinjen til $y = f(x)$ i punktet x_0 gitt ved $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Regneregler for derivasjon. Hvis f og g er deriverbare i x , så gjelder:

$$\bullet (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{gitt at } g(x) \neq 0)$$

Kjerneregelen. Hvis g er deriverbar i x og f er deriverbar i $g(x)$, så er $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

Derivasjon av potensfunksjoner. $\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$

Derivasjon av eksponential- og logaritmefunksjon. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ og $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$.

Derivasjon av trigonometriske funksjoner. $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ og $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$ og $\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x)$

Derivasjon av inversfunksjoner. Hvis f er deriverbar og injektiv (en-til-en), så er

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

dersom $y = f(x)$ og $f'(x) \neq 0$.

Taylorpolynomer. Taylorpolynomet til f av grad n om punktet a er

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Noen ubestemte integraler. Her er $a \neq 0$ og $r \neq -1$.

$$(1) \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(3) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad \text{og} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \neq 1)$$

$$(4) \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

$$(5) \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

$$(6) \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$$

Leibniz' regel. $\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(y) dy = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$.

Delvis integrasjon. Hvis f, g er kontinuerlig deriverbare, så er

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$