MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Høst 2021

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 8

$\boxed{1}$ La y være funksjonen av x som er gitt implisitt ved likninga

$$y^2 + y + x^4 + 3x - 4 = 0.$$

Finn $\dfrac{dy}{dx}$. Finn tangenten til grafen av y i punktet $(1, -1)$.

Løsning: We differentiate both sides with respect to x.

$$\begin{aligned} y^2 + y + x^4 + 3x - 4 = 0 &\Rightarrow (y^2 + y + x^4 + 3x - 4)' = 0 \\ &\Rightarrow 2yy' + y' + 4x^3 + 3 = 0 \\ &\Rightarrow (2y+1)y' = -(4x^3+3) \\ &\Rightarrow y' = -\frac{4x^3+3}{2y+1}. \end{aligned}$$

At the point $(1, -1)$,

$$\frac{dy}{dx}|_{x=1} = -\frac{4 \cdot 1^3 + 3}{2(-1)+1} = 7.$$

The equation of the tangent is

$$y - (-1) = 7(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad y = 7x - 8.$$

$\boxed{2}$ Bruk l'Hôpitals regel og regn ut grenseverdiene

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x^{2\pi})}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot 3^{-x}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

Løsning: I alle oppgavene benyttes l'Hôpitals regel. Den sier at hvis man har en grenseverdi av en brøk der både telleren og nevneren går mot enten 0 eller ∞ kan man derivere telleren og nevneren hver for seg. Altså at hvis man ender opp med $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$ så vil:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(i) Ser på

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x^{2\pi})}.$$

Hvis $x \to 1$ her ender vi opp med $\frac{0}{0}$, altså kan vi bruke l'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x^{2\pi})} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sin(\pi x))'}{(2\pi \ln(x))'} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\pi \cos(\pi x)}{2\pi / x} \\
&= \frac{\pi \cos(\pi)}{2\pi} \\
&= \frac{-\pi}{2\pi} \\
&= \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

(ii) Ser på

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot 3^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3^x}.$$

Når $x \to \infty$ ender vi opp med $\frac{\infty}{\infty}$, altså kan vi bruke l'Hôpitals regel.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3)'}{(3^x)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{3^x \cdot \ln(3)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2)'}{(3^x \cdot \ln(3))'} \quad \text{(får igjen } \frac{\infty}{\infty}\text{, så bruker l'Hôpital igjen)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{3^x \cdot (\ln(3))^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(6x)'}{(3^x \cdot (\ln(3))^2} \quad \text{(får det igjen, enda en gang)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{3^x \cdot (\ln(3))^3} \\
&= \underline{\underline{0}}
\end{aligned}$$

(iii) Dette er en krevende oppgave. Vi skal benytte at hvis vi har en funksjon $f(x)$ kan den skrives som $f(x) = e^{\ln f(x)}$. Lar $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$. Får da:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Fokuserer så kun på delen

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

og skriver den om til

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Hvis nå $x \to \infty$ ender vi opp med $\frac{0}{0}$, altså kan vi bruke l'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(1+1/x))'}{(1/x)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot(1+1/x)'}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot(-1/x^2)}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tar vi så dette med tilbake til det første uttrykket får vi:

$$\begin{aligned}
&= e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln(1+1/x)} \\
&= e^1 \\
&\underline{\underline{= e}}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ (i) Finn tredje grads taylorpolynom til $g(x) = x^{1/3}$ om $x_0 = 8$.

(ii) Finn andre grads taylorpolynom til $h(x) = \sin(e^x)$ om $x_0 = \ln \pi$.

Løsning:

(i) $g(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 8$. Siden vi skal ha tredjegradspolynomet trenger vi de tre første deriverte. Disse er gitt som:

$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ og $g^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$.

Med dette finner vi tredjegradspolynomet som:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= g(8) + \frac{g'(8)}{1!}(x-8) + \frac{g''(8)}{2!}(x-8)^2 + \frac{g^{(3)(8)}}{3!}(x-8)^3 \\
&= g(8) + g'(8)(x-8) + \frac{g''(8)}{2}(x-8)^2 + \frac{g^{(3)}(8)}{6}(x-8)^3 \\
&= 8^{1/3} + \frac{1}{3}8^{-2/3}(x-8) + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{9}8^{-5/3})(x-8)^2 + \frac{1}{6}\cdot(\frac{10}{27}8^{-8/3})(x-8)^3 \\
&= \underline{\underline{2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3.}}
\end{aligned}$$

(ii) $h(x) = \sin(e^x)$, $x_0 = \ln(\pi)$. Et andregradspolynom, altså trenger vi to deriverte. Disse er:

$h'(x) = e^x \cdot \cos(e^x)$ og $h''(x) = e^x \cdot \cos(e^x) - e^{2x} \cdot \sin(e^x)$.

Regner så ut verdiene vi trenger:

$h(\ln(\pi)) = \sin(\pi) = 0,$

$h'(\ln(\pi)) = \pi \cdot \cos(\pi) = -\pi,$

$h''(\ln(\pi)) = \pi \cdot \cos(\pi) - 2\pi \cdot \sin(\pi) = -\pi$

Setter dette inn i uttrykket for andregrads taylorpolynom og får:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0 + (-\pi)(x - \ln(\pi)) + \frac{(-\pi)}{2}(x - \ln(\pi))^2 \\ &= \underline{\underline{-\pi(x - \ln(\pi)) - \frac{\pi}{2}(x - \ln(\pi))^2}} \end{aligned}$$

4 Finn lokale og globale toppunkt og bunnpunkt (om de finnes) til funksjonen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Finn ut på hvilke intervaller funksjonen vokser og på hvilke den synker; til eksempel, se på fortegnet til den deriverte. Argumentet at et punkt er en lokal ekstremverdi trenger ikke være kjempeformellt.

Hint: Det kan være lurt å skissere grafen.

Løsning: Globale toppunkt og bunnpunkt kan finnes på tre plasser. Den første (og vanligste) er der den deriverte er null, den andre er der funksjonen eventuelt er diskontinuerlig, og den tredje er i grensene til definisjonsområdet.

For det første er denne funksjonen kontinuerlig overalt, altså trenger vi ikke tenke på punkter den kan være diskontinuerlig. For det andre er definisjonsmengden til funksjonen alle reelle tall, altså er det ingen grenser å sjekke. Det betyr at hvis funksjonen har globale topp- eller bunnpunkt må de være der den deriverte er null.

Deriverer og setter lik null:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1) = 0$$

Her er det veldig fint om man setter opp et fortegnsskjema. Da vil man se at funksjonen vokser for alle $x < -1$ og alle $x > 1$, så synker den for alle $-1 < x < 1$. Det betyr at funksjonen har et toppunkt i $x = -1$ og et bunnpunkt i $x = 1$. Finner disse verdiene: $f(-1) = 4$ og $f(1) = 0$. Så må vi finne ut om disse er globale topp- og bunnpunkter.

Siden $f(x)$ vokser for alle $x > 1$ kan det tenkes at den på et eller annet tidspunkt får større verdi enn 4. Velger derfor et stort positivt tall, for eksempel 100. Får da $f(100) = 999702$, som er mye større enn 4. Siden toppunktet ikke er den største verdien til funksjonen kan vi konkludere at funksjonen ikke har noen globale toppunkt.

Tilsvarende vokser $f(x)$ for alle $x < -1$. Det kan bety at den på et eller annet punkt har hatt en mindre verdi enn 0. Tester med å velge et stort negativt tall, for eksempel -100. Får da $f(-100) = -999698$. Det betyr at bunnpunktet ikke er den minste verdien til funksjonen, altså har den ingen globale bunnpunkt. Altså:

$\underline{\underline{f(x) \text{ har ingen globale topp- eller bunnpunkt.}}}$