$\boxed{1}$ Finn den deriverte av funksjonene

1. $f(x) = \ln(\frac{1}{x^2})$
2. $g(x) = \dfrac{1 + \sin x}{1 + e^x + x^2}$
3. $h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Løsning:

1. $f(x) = \ln(\frac{1}{x^2})$.

Her kan man enten skrive om uttrykket og så derivere eller bare derivere med en gang. Hvis man skriver om blir det:

$$\ln(\frac{1}{x^2}) = -\ln(x^2) = -2 \cdot \ln(x),$$

som kan deriveres enkelt.

Hvis man ikke gjør det slik har man:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \ln(\frac{1}{x^2}) \\ &= \frac{1}{1/x^2} \cdot (\frac{1}{x^2})' \\ &= x^2 \cdot (-2\frac{1}{x^3}) = \underline{\underline{\frac{-2}{x}}} \end{aligned}$$

2. $g(x) = \frac{1+\sin x}{1+e^x+x^2}$.

For å derivere dette må man bruke kvotientregelen. Den er gitt som:

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Bruker $f = 1 + \sin x$ og $g = 1 + e^x + x^2$, slik at:

$$g'(x) = (\frac{1+\sin x}{1+e^x+x^2})'$$
$$= \frac{(1+\sin x)' \cdot (1+e^x+x^2) - (1+\sin x)\cdot(1+e^x+x^2)'}{(1+e^x+x^2)^2}$$
$$= \frac{\cos x \cdot (1+e^x+x^2) - (1+\sin x)\cdot(e^x+2x)}{(1+e^x+x^2)^2}$$
$$= \underline{\underline{\frac{\cos x}{1+e^x+x^2} - \frac{(1+\sin x)\cdot(e^x+2x)}{(1+e^x+x^2)^2}}}$$

3. $h(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

Derivasjon av kvadratrøtter er gitt ved:

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

Bruker $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, og får:

$$h'(x) = (\sqrt{1+\sqrt{x}})'$$
$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot (1+\sqrt{x})'$$
$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot (\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}})$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{4\cdot\sqrt{x+x^{3/2}}}}}$$

$\boxed{2}$ Finn den deriverte (med hensyn på t) av funksjonen

$$f(t) = \frac{t^2-1}{t+1} + 6\cdot t^{1/3} + \sqrt{\sin t} + 4^t.$$

Løsning:

Merk først at $\frac{t^2-1}{t+1} = t - 1$ ved tredje kvadratsetning, som gjør utregningen litt enklere. Har da:

$$f(t) = t - 1 + 6\cdot t^{1/3} + \sqrt{\sin t} + 4^t.$$

Deriverer med hensyn på t, som gir:

$$f'(t) = (t-1)' + (6\cdot t^{1/3})' + (\sqrt{\sin t})' + (4^t)'$$
$$= 1 + (6\cdot\frac{1}{3}\cdot t^{-2/3}) + \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin t}}\cdot(\sin t)' + (4^t\cdot\ln(4))$$
$$= \underline{\underline{1 + 2\cdot t^{-2/3} + \frac{\cos t}{2\cdot\sqrt{\sin t}} + 4^t\cdot\ln(4)}}$$

$\boxed{3}$ Finn en tilnærming til $\log_e(2)$ ved å bruke Newtons metode fra startpunktet $a_0 = 5$ for å løse likninga

$$e^x = 2.$$

Hvor mange steg må du ta for å få korrekt verdi til tre desimaler? Kalkulator eller datamaskin anbefalt ved øvningen.

Løsning:

(Bruker $\ln(x)$ for $\log_e(x)$).

Merk først at likninga $e^x = 2$ har løsning nøyaktig $x = \ln(2)$.

Vil bruke Newtons metode for å tilnærme denne verdien. I Newtons metode trenger man en funksjon på formen $f(x) = 0$, så velger $f(x) = e^x - 2$. Da er Newtons metode gitt ved:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Setter inn $f(x)$, som gir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 2}{e^{x_n}}$$

På kalkulator fins et triks for å regne ut dette kjapt. Velg først startverdien (her 5) og trykk '='. Deretter skriver man uttrykket for x_{n+1} med 'Ans' der det er x_n, slik at det står '$Ans - \frac{e^{Ans}-2}{e^{Ans}}$'. Hver gang man tryker '=' får man da neste x_{n+1}.

Finner x_1:

$$x_1 = 5 - \frac{e^5 - 2}{e^5} = \underline{4.013476}$$

Setter så dette inn for x_n igjen og fortsetter:

- $x_2 = 3.049617$
- $x_3 = 2.144371$
- $x_4 = 1.378654$
- $x_5 = 0.882489$
- $x_6 = 0.709993$
- $x_7 = 0.693288$
- $x_8 = 0.693147$

Fra x_7 til x_8 har ikke de tre første desimalene endret seg. Altså trengs 7 steg for få en nøyaktighet på 3 desimaler.

Videre har vi funnet at $\underline{\underline{\ln(2) \approx 0.693147}}$

($e^{0.693147} = 1.999999639$, så dette er en veldig god tilnærming.)

$\boxed{4}$ La $a > 0$ og $a \neq 1$. Bruk at $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$ og derivasjon av inversfunksjoner til å vise at

$$\frac{d}{dy}\log_a(y) = \frac{1}{y \log_e a}.$$

Kan du regne ut dette på en enklere måte?

Løsning:

Uttrykket for deriverte av inversfunksjoner er gitt som:

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Siden vi er interessert i $\log_a(y)$ lar vi dette være inversfunksjonen, slik at $f^{-1}(y) = \log_a(y)$. Da blir $f(x) = a^x$.

Har dermed $f'(x) = \frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln(a)$, som oppgitt i oppgaven.

La så $x = f^{-1}(y) = \log_a(y)$. Setter dette inn i uttrykket for $f'(x)$ og får:

$$f'(f^{-1}(y)) = a^{\log_a(y)} \cdot \ln(a) = \underline{y \cdot \ln(a)}$$

Setter til slutt dette inn i uttrykket for $\frac{d}{dy}f^{-1}(y)$ og får:

$$\underline{\underline{\frac{d}{dy}\log_a(y) = \frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{y \cdot \ln(a)}}}$$

En enklere måte å regne ut dette på er ved å bruke at $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$. Tar den deriverte med hensyn på y på begge sider og får:

$$\underline{\underline{\frac{d}{dy}\log_a(y)}} = \frac{d}{dy}\frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \frac{1/y}{\ln(a)} = \underline{\underline{\frac{1}{y \cdot \ln(a)}}}$$