$\boxed{1}$ Hva er grenseverdien

$$\lim_{x\to 7} \frac{(x-7)^2 + 5\cdot(x-7)}{(x-7)(x-4)}?$$

Løsning:

Forenkler uttrykket:

$$\begin{aligned} &\frac{(x-7)^2 + 5\cdot(x-7)}{(x-7)(x-4)} \\ =& \frac{(x-7)^2((x-7)+5)}{(x-7)(x-4)} \end{aligned}$$

Deler vekk $(x-7)$ i teller og nevner:

$$\begin{aligned} &= \frac{x-7+5}{x-4} \\ &= \underline{\frac{x-2}{x-4}} \end{aligned}$$

Tar så grenseverdien:

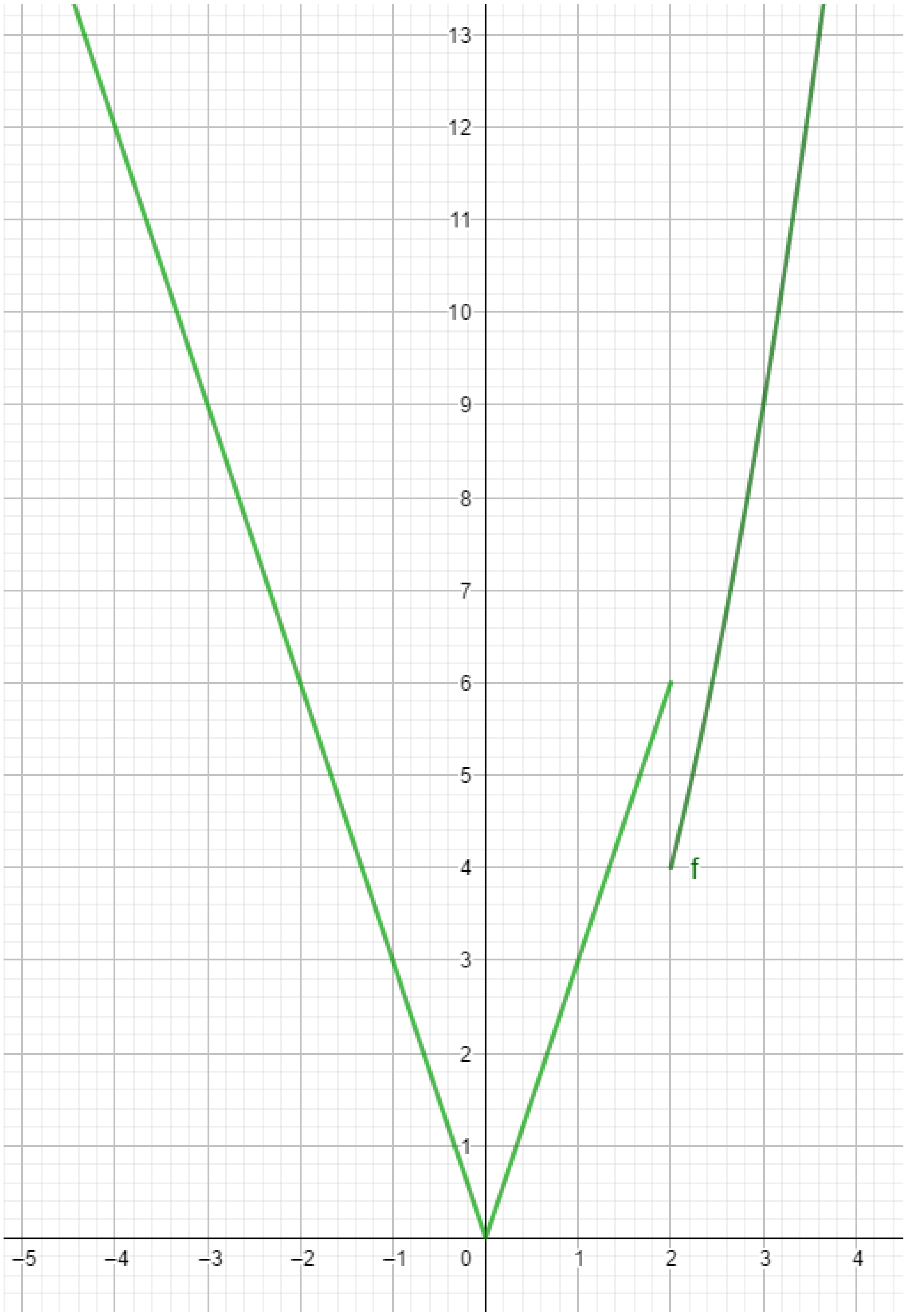
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 7} \frac{x-2}{x-4} \\ &= \frac{7-2}{7-4} \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Skisser grafen til funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{hvis } x > 2 \\ 3|x|, & \text{hvis } x \leq 2. \end{cases}$$

Gjett fra grafen om funksjonen er kontinuerlig. Forklar hvorfor du gjettet så.

Løsning:



Figur:

Denne funksjonen er ikke kontinuerlig. Det ser vi fordi den gjør et hopp i $x = 2$ fra 6 til 4. Altså er grenseverdien forskjellig når vi går fra hver sin side, og funksjonen er derfor ikke kontinuerlig.

$\boxed{3}$ La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert stykkevis som nedenfor. Vis at f er kontinuerlig på punktet $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{hvis } x < -1 \\ 1, & \text{hvis } x = -1 \\ (x+1)^2 + 1, & \text{hvis } x > -1. \end{cases}$$

Løsning:

For at $f(x)$ skal være kontinuerlig i $x = -1$ må grenseverdien til f fra både høyre og venstre være lik den faktiske verdien til funksjonen i $x = -1$.

Fra venstre først:

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{-x} = \sqrt{-(-1)} = \sqrt{1} = \underline{1}$$

Så fra høyre:

$$\lim_{x \to -1} (x+1)^2 + 1 = (-1+1)^2 + 1 = \underline{1}$$

Har også $f(-1) = 1$.

Det betyr at $\underline{\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} = f(-1)}$

Altså:

$$\underline{\underline{f(x) \text{ er kontinuerlig i punktet } x = -1}}$$

$\boxed{4}$ Bruk skjærinssetningen til å vise at funksjonen g definert nedenfor har et nullpunkt, dvs. et tall x_0 i definisjonsmengden til g, hvor $g(x_0) = 0$.

$$g(x) = \log(x) + x^2$$

Hint: Bruk en kalkulator til å finne et tall a, hvor $g(a) < 0$. Ellers prøv a som ser ut $e^{\text{noe heltall}}$. Det er lett å finne et tall b med $g(b) > 0$.

Løsning:

Skjæresetningen sier at for en kontinuerlig funksjon som er negativ i ett punkt og positivt i et annet, så må funksjonen være 0 i et punkt mellom disse to verdiene. Velger her $a = 0.01$ og $b = 100$.

$g(0.01) = -4.6$ og $g(100) = 10004.6$.

$\underline{\underline{\text{Ved skjæresetningen må derfor } g(x) \text{ være 0 i et punkt mellom } x = 0.01 \text{ og } x = 100}}$