NTNU
Institutt for matematiske fag

MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Løsningsforslag

Eksamen 17. august 2021

1 Riktig alternativ er $a^2 a^{\ln a}$.

$a^{\ln(ae^2)} = a^{\ln a + \ln(e^2)} = a^{\ln a} a^{\ln(e^2)} = a^a a^{2\ln e} = a^2 a^{\ln a}$

2 Riktig alternativ er *Nei for $a = 0$, ja for $a \neq 0$.*

I det første tilfellet ser vi på grenseverdien av $\frac{1}{x}$, men da er $-\infty = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Grenseverdien er forøvrig $-\frac{1}{4a}$ i det siste tilfellet.

3 Riktig alternativ er

$$y'(x) = \frac{2x^3 - y^5}{5xy^4 - 2y^3}.$$

Implisitt derivasjon av sammenhengen med hensyn på x gir

$$4x^3 + 4y^3 y' = 2y^5 + 10xy^4 y',$$

og ved å løse for y' får vi svaret.

4 Riktig alternativ er *Funksjonen har et globalt toppunkt i $x \approx 0{,}1$, men intet globalt bunnpunkt.*

Vi ser at funksjonen er strengt avtagende på intervallet $[0{,}8, 1]$, så funksjonsverdien i $x = 0{,}9$ gir en nedre skranke for funksjonsverdiene på $(-1, 0{,}9)$. Men $x = 0{,}9$ er ikke inkludert i det åpne intervallet, og dermed kan vi for ethvert punkt $-1 < x < 0{,}9$ finne et punkt $\tilde{x}$ som ligger enda nærmere endepunktet, $x < \tilde{x} < 0{,}9$, med en mindre funksjonsverdi, $f(0{,}9) < f(\tilde{x}) < f(x)$.

5 Riktig alternativ er $T_3 - T_2 = -x^3/6$.

Som forklart i teksten er $f'''(0) = -\cos 0 = -1$ og

$$T_3(x) - T_2(x) = \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 = -\frac{x^3}{6}.$$

6 **a)** Ved å fullføre kvadratene finner vi

$$y^2 + 4x + x^2 - 4y = 1 \iff (x+2)^2 + (y-2)^2 = 3^2,$$

altså likninga for en sirkel med sentrum i $(x, y) = (-2, 2)$ og radius 3, se Figur 1.

b) Fra figuren ser vi at den "enkleste" linja med stigningstall 1, nemlig $y = x$, skjærer sirkelen i to punkter.

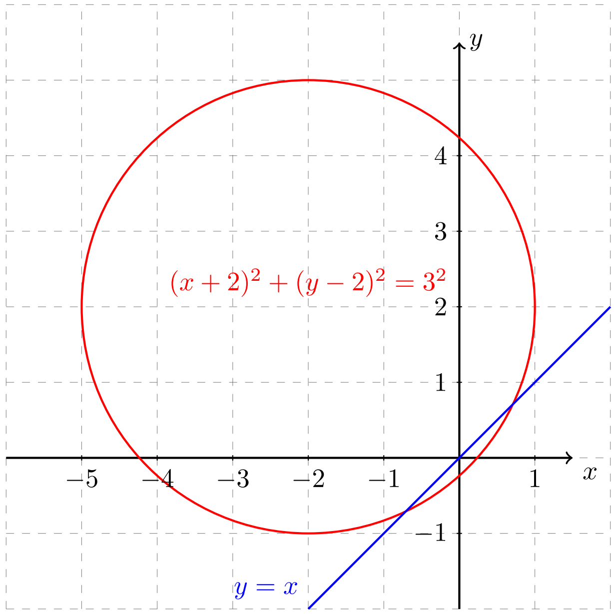
Punktene er forøvrig gitt av $2x^2 = 1$, som gir oss $(x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, uten at dette ble spurt om i oppgaven.

c) Se Figur 1.

7 Vi legger merke til at med største mulige definisjonsmengder har vi $f\colon (-\infty, \infty) \to [0, 2]$ og $g\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + \cos(\sqrt{x})$, og den største definisjonsmengden sammenfaller med den største definisjonsmengden for g, nemlig $[0, \infty)$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 + \cos x}$, og den største definisjonsmengden sammenfaller med den største definisjonsmengden for f, nemlig $(-\infty, \infty)$.



Figur 1: **Oppgave 6:** Rød sirkel fra deloppgave a) og blå linje fra deloppgave c).

8 Funksjonen kan skrives

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 200(x - \frac{4}{5})^2 - 1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

og vi legger merke til at den ikke er kontinuerlig i $x = \frac{1}{2}$ siden $\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x) = 0 \neq 17 = f(\frac{1}{2})$.

I tillegg til dette singulære punktet sjekker vi endepunktene hvor $f(0) = \frac{1}{2}$ og $f(1) = 7$. Til slutt finner vi ingen kritiske punkter på $[0, \frac{1}{2})$ hvor $f'(x) = -1$, og ett kritisk punkt $x = \frac{4}{5}$ med $f(\frac{4}{5}) = -1$ på $[\frac{1}{2}, 1]$ hvor $f'(x) = 400(x - \frac{4}{5})$.

Vi konkluderer med at $x = \frac{1}{2}$ er det globale toppunktet med verdi 17, og $x = \frac{4}{5}$ er det globale bunnpunktet med verdi -1.

9 **a)** Vi kan benytte l'Hôpitals regel i situasjoner hvor vi vil finne grenseverdien

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

for to funksjoner $f(x)$, $g(x)$ som er deriverbare på et intervall (a, b) hvor $g'(x) \neq 0$, i tillegg til

1. $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$ eller $\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to a+} g(x) = \pm\infty$.
2. $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

I slike tilfeller er

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Her kan $a+$ erstattes med $b-$ eller c for $a < c < b$.

b) Et eksempel er

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

som gir et 0/0-uttrykk. Siden $(\arctan x)' = 1/(1 + x^2)$ og $(x)' = 1$ får vi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + x^2} = 1.$$

$\boxed{10}$ Dette er et uekte integral hvor integranden har en singularitet i origo, og dermed må vi betrakte

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{1} x^p \, \mathrm{d}x$$

En antiderivert for x^p er $\frac{1}{1+p} x^{1+p}$ for $p \neq -1$, og $\ln|x|$ for $p = -1$. Dermed er

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{1} x^p \, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0+} \begin{cases} \frac{1-\epsilon^{1+p}}{1+p}, & p \neq -1 \\ -\ln \epsilon, & p = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1+p}, & p > -1, \\ \infty, & p \leqslant -1. \end{cases}$$

Altså konvergerer integralet kun for de negative, reelle tallene $-1 < p < 0$.