

- 1 Riktig alternativ er $a^2 a^{\ln a}$.

$$a^{\ln(ae^2)} = a^{\ln a + \ln(e^2)} = a^{\ln a} a^{\ln(e^2)} = a^{\ln a} a^{2 \ln e} = a^{\ln a} a^2$$

- 2 Riktig alternativ er *Nei for $a = 0$, ja for $a \neq 0$.*

I det første tilfellet ser vi på grenseverdien av $\frac{1}{x}$, men da er $-\infty = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Grenseverdien er forøvrig $-\frac{1}{4a}$ i det siste tilfellet.

- 3 Riktig alternativ er

$$y'(x) = \frac{2x^3 - y^5}{5xy^4 - 2y^3}$$

Implisitt derivasjon av sammenhengen med hensyn på x gir

$$4x^3 + 4y^3 y' = 2y^5 + 10xy^4 y',$$

og ved å løse for y' får vi svaret.

- 4 Riktig alternativ er *Funksjonen har et globalt toppunkt i $x \approx 0,1$, men intet globalt bunnpunkt.*

Vi ser at funksjonen er strengt avtagende på intervallet $[0,8, 1]$, så funksjonsverdien i $x = 0,9$ gir en nedre skranke for funksjonsverdiene på $(-1, 0,9)$. Men $x = 0,9$ er ikke inkludert i det åpne intervallet, og dermed kan vi for ethvert punkt $-1 < x < 0,9$ finne et punkt \tilde{x} som ligger enda nærmere endepunktet, $x < \tilde{x} < 0,9$, med en mindre funksjonsverdi, $f(0,9) < f(\tilde{x}) < f(x)$.

- 5 Riktig alternativ er $T_3 - T_2 = -x^3/6$.

Som forklart i teksten er $f'''(0) = -\cos 0 = -1$ og

$$T_3(x) - T_2(x) = \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 = -\frac{x^3}{6}$$

- 6 a) Ved å fullføre kvadratene finner vi

$$\begin{aligned} & y^2 + 4x + x^2 - 4y = 1 \\ \iff & (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = 1 + 4 + 4 \\ \iff & (x+2)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

altså likninga for en sirkel med sentrum i $(x, y) = (-2, 2)$ og radius 3, se Figur 1.

b) Fra figuren ser vi at den "enkleste" linja med stigningstall 1, nemlig $y = x$, skjærer sirkelen i to punkter.

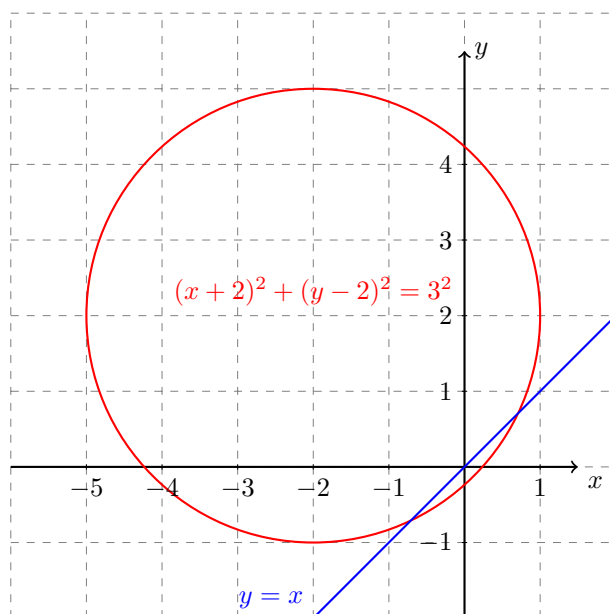
Punktene er forøvrig gitt av $2x^2 = 1$, som gir oss $(x, y) = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$, uten at dette ble spurt om i oppgaven.

c) Se Figur 1.

- 7 Vi legger merke til at med største mulige definisjonsmengder har vi $f: (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 2]$ og $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Altså er definisjonsmengden til f gitt ved $D_f = (-\infty, \infty)$ og verdimengden er $V_f = [0, 2]$. Tilsvarende er $D_g = V_g = [0, \infty)$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + \cos(\sqrt{x})$. Siden $V_g \subset D_f$ har vi at den største definisjonsmengden for $f \circ g$ sammenfaller med den største definisjonsmengden for g , nemlig $[0, \infty)$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 + \cos x}$. Siden $V_f \subset D_g$ har vi at den største definisjonsmengden for $g \circ f$ sammenfaller med den største definisjonsmengden for f , nemlig $(-\infty, \infty)$.



Figur 1: **Oppgave 6:** Rød sirkel fra deloppgave a) og blå linje fra deloppgave c).

8 Funksjonen kan skrives

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 200(x - \frac{4}{5})^2 - 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

og vi legger merke til at den ikke er kontinuerlig i $x = \frac{1}{2}$ siden $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = 0 \neq 17 = f(\frac{1}{2})$.

I tillegg til dette singulære punktet sjekker vi endepunktene hvor $f(0) = \frac{1}{2}$ og $f(1) = 7$. Til slutt finner vi ingen kritiske punkter på $[0, \frac{1}{2})$ hvor $f'(x) = -1$, og ett kritisk punkt $x = \frac{4}{5}$ med $f(\frac{4}{5}) = -1$ på $[\frac{1}{2}, 1]$ hvor $f'(x) = 400(x - \frac{4}{5})$.

Vi konkluderer med at $x = \frac{1}{2}$ er det globale toppunktet med verdi 17, og $x = \frac{4}{5}$ er det globale bunnpunktet med verdi -1 .

9 a) Vi kan benytte l'Hôpitals regel i situasjoner hvor vi vil finne grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

men hvor vi ender opp med et ubestemt uttrykk av typen $0/0$ eller ∞/∞ når vi setter inn for $x = a$. Dersom $f(x)$ og $g(x)$ er deriverbare og oppfyller

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ eller $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

har vi at

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Regelen fungerer for $a = +\infty$ eller $a = -\infty$, såvel som for ensidige grenser $x \rightarrow a^-$ eller $x \rightarrow a^+$.

b) Et eksempel er

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

som gir et $0/0$ -uttrykk. Siden $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ og $(x)' = 1$ får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

10 Dette er et uekte integral hvor integranden har en singularitet i det venstre endepunktet av integrasjonsintervallet, og dermed må vi betrakte integralet som en grenseverdi på følgende vis,

$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^p dx.$$

En antiderivert for x^p er $\frac{1}{1+p}x^{1+p}$ for $p \neq -1$, og $\ln|x|$ for $p = -1$. Dermed er

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^p dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{1-\epsilon^{1+p}}{1+p}, & p \neq -1 \\ -\ln \epsilon, & p = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1+p}, & p > -1, \\ \infty, & p \leq -1. \end{cases}$$

Her er det viktig å skille mellom tilfellene $p > -1$ og $p < -1$ siden $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{1+p} = 0$ for $p > -1$, men $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{1+p} = \infty$ for $p < -1$. Altså konvergerer integralet kun for de negative, reelle tallene $-1 < p < 0$.