NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0001 Brukerkurs i matematikk A**

Faglig kontakt under eksamen: Tommi Brander
Tlf: 966 46 311

Eksamensdato: 8. desember 2020
Eksamenstid (fra–til): 09:00 – 13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 9
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Eksamen foregikk gjennom Inspera. Oppgavene er de samme som her. Med flervalgsoppgavene krevdes ingen begrunnelsen, men jeg har skrevet dem her av pedagogiske grunner. Med skriftlige oppgaver begrunnelsene krevdes.

Flervalg

Oppgave 1 Hva er verdimengden til $f\colon [0, 3\pi/4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$?
Hint: Skisser grafen.

a) $[0, 1/\sqrt{2}]$

b) $[0, 1/\sqrt{2})$

c) $[0, 1]$

d) $[0, 1)$

Løsning
Det er $[0, 1]$.

Verdimengden av $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ er allerede $[0, 1]$ (se enhetssirkelen, eller at sinus er økende og kontinuerlig og $\sin(0) = 0$ og $\sin(\pi/2) = 1$), og på intervallet $(\pi/2, 3\pi/4)$ tar sinus bare positive verdier, så det forstørrer verdimengden ikke.

Oppgave 2 Den hyperbolske sinusen defineres ved formelen

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Hva er

$$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x?$$

a) Nøyaktig null.

b) Nesten null.

c) Nøyaktig $e^3 + e^{-3}$.

d) Nøyaktig $\frac{1}{2}\left(e^3 + e^{-3}\right)$.

Løsning
Det er nøykatig null.

Funksjonen er odde:

$$-f(-x) = -\frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{-e^{-x} + e^{x}}{2} = f(x).$$

Dermed er integral over $[-a, a]$ null for alle $a \in \mathbb{R}$, her $a = 3$. Det kan også regnes som et vanlig integral.

Oppgave 3 Hvilken regneregel bør du bruke når du deriverer

$$f(x) = \frac{\ln\left(-4x^3 + x\right)}{8}?$$

a) Brøkregelen.

b) Produktregelen.

c) Kjerneregelen.

d) Lineæriteten til logaritmen.

Løsning
Kjerneregelen er den som passer best, da det er sammenslått funksjon som integreres.

Nevneren er bare en konstant, så brøkregelen ikke trenges. Det er ikke noe produkt synlig som burde deriveres med produktregelen. Logaritmen er ikke lineær, så dens lineæritet er feil.

Oppgave 4 Hva er den deriverte til

$$g(x) = x \cos x \tan x?$$

a) $1 + \cos x$

b) $1 - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$

c) $\sin x + x \cos x$

d) $\cos x \tan x - x \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Løsning
$g(x) = x \sin x$ kan deriveres ved produktregel og gir $\sin x + x \cos x$.

Alternativt kan man bruke logaritmisk deriverte eller produktregelen to ganger.

Oppgave 5 Hvilket alternativ består av alle de antideriverte til

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)?$$

a) $\frac{1}{2}x^2 \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

b) $\frac{1}{2}x^2 \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$ for $C \in \mathbb{R}$

c) $-\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$ for $C \in \mathbb{R}$

d) $-\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

Løsning
Siden vi vil vite alle de antideriverte, må vi ha «$+C$» med. Vi kan finne de riktige antideriverte lettest ved å derivere alternativa.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right) \\ &= -\left(-\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)x \\ &= x\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right) = f(x), \end{aligned}$$

så vi har rett.

Produktregelen og det andre alternativet gir et helt feil resultat.

Skriftlige oppgaver

Oppgave 6 Definer en rasjonal funksjon Q med alle de følgende egenskapene:

a) Funksjonen $Q(x)$ er ikke definert i $x = -2$.

b) Funksjonen $Q(x)$ er ikke definert i $x = 11$.

c) Grenseverdien i pluss uendelig til funksjonen Q er pluss uendelig:

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty.$$

Vis at funksjonen faktisk har alle de nevnte egenskapene.

Løsning
Det er mange løsninger her. Vi finner en enkel en ved å oppfylle punkta én-for-én:

1. Den rationale funksjonen

$$Q_1(x) = \frac{1}{x-(-2)} = \frac{1}{x+2}$$

   er ikke definert i $x = -2$ (vi deler med null der).

2. Funksjonen

$$Q_2(x) = \frac{1}{(x+2)(x-11)}$$

   er ikke definert i $x = 11$ og i $x = -2$.

3. Akkurat nå er funksjonen positiv for store x, men oppfører seg som $\frac{1}{x^2} \to 0$ når $x \to \infty$. Vi ganger telleren med x^3; funksjonen blir positiv for store x og telleren vokser raskere enn nevneren. Dette gir oss

$$Q(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x-11)}.$$

Det er klart at Q er ikke definert i $x = -2$ eller $x = 11$, fordi der måtte vi dele med null. Grenseverdien:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} Q(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+2)(x-11)} &(1)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2}\frac{x}{(1+2/x)(1-11/x)} &(2)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1+2/x)(1-11/x)} = \infty. &(3)
\end{aligned}$$

I den siste formelen, nevneren nærmer seg én siden $2/x \to 0$ og $-11/x \to 0$ når $x \to \infty$.

Oppgave 7 En sykdom spres raskt slik at hvert smitta individ forårsaker i gjennomsnitt 1,2 smitta individ neste uke, dvs. antall infiserte multipliseres med 1,2 hver uke. I begynnelsen er det 2 % smittede i en befolkning på 4 millioner.

a) Skriv ei rekursiv likning for antallet smittede.

b) Hvor mange uker tar det før 10 % av individa er infiserte?

c) I løpet av noen titalls uker er det mye mer enn 100 % av befolkninga som er infisert, noe som ikke gir mening. Forklar hva modellen ikke tar hensyn til, som forårsaker denne feilen. En kort forklaring ved noen få setninger er tilstrekkelig svar.

Løsning

1. $a_0 = 80000$ og $a_{n+1} = 1{,}2a_n$.
2. Her antallet smittede betyr ikke noe, så vi kan bruke litt mindre tall: $a_0 = 2\ \%$ og
$$10\ \% \leq a_n = a_0 \cdot 1{,}2^n = 2\ \% \cdot 1{,}2^n.$$
Vi deler begge sider med 2 % og får
$$1{,}2^n \geq 5.$$
Vi kan prøve forskjellige verdier n for å finne ut $1{,}2^8 \approx 4{,}3$ og $1{,}2^9 \approx 5{,}2$, så **antallet uker er 9**. Ellers kan vi ta logaritmen av begge sider, som gir
$$\ln(1{,}2^n) \geq \ln 5,$$
og deretter bruke en regneregel $\log(a^b) = b \log a$ for å få
$$n \ln 1{,}2 \geq \ln 5,$$
som er ekvivalent til (dvs. den samme som)
$$n \geq \frac{\ln 5}{\ln 1{,}2} \approx 8{,}8;$$
altså **ni uker**.

3. Modellen tar ikke til hensyn at smitten vokser langsommere da det er færre som kan smittes. I denne modellen betyr dette at vekstraten burde være proporsjonellt til den totale befolkningen minus antallet smittede.

Oppgave 8 Betrakt likninga $e^{2x} + 2x = 0$ med startverdi $x_0 = -0{,}5$.

a) Begrunn hvorfor likninga har ei løsning mellom -1 og 0.

b) Finn løsninga ved Newtons metode, der du lar startverdien være lik $x_0 = -0{,}5$.

Løsning
Skriv $f(x) = e^{2x} + 2x$. Nå $f(0) = e^0 + 1 = 1$ og $f(-1) = e^{-2} - 2 < 0$. Siden f er kontinuerlig forteller skjæringssetningen at det finnes ei løsning mellom -1 og 0.

For å finne ei løsning (vi har ikke vist at det kun finnes én) bruker vi Newton sin metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Metoden krever at vi regner den deriverte (hvor vi bruker kjerneregelen):

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2.$$

Nå

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{2x_n} + 2x_n}{2e^{2x_n} + 2} = x_n - \frac{1}{2}\frac{e^{2x_n} + 2x_n}{e^{2x_n} + 1}.$$

Vi får (jeg brukte flere desimaler i beregningen enn jeg har skrevet her)

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1/2 = -0{,}5 \\
x_1 &= -1/(1+e) \approx -0{,}269 \\
x_2 &\approx -0{,}283 \\
x_3 &\approx -0{,}284 \\
x_4 &\approx -0{,}284
\end{aligned}$$

Vi tester $f(-0{,}284) \approx -0{,}001 \approx 0$. Newton sin metode har gitt oss ei god tilnærming til ei løsning.

Oppgave 9 Bruk den deriverte av en inversfunksjon for å regne ut den deriverte til $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x^{1/5}.$$

Sjekk om resultatet er riktig med å derivere g som en potensfunksjon.
Hint: Definer $f(x) = x^5$.

Løsning

Vi bruker hentydninga sammen med formelen

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

hvor $f^{-1} = g$ (fordi $(x^{1/5})^5 = x$ og $(x^5)^{1/5} = x$). Vi trenger også $f'(x) = 5x^4$ i formelen.

Nå kan vi bruke formelen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^{1/5} = \left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{f'(y^{1/5})} \\ &= \frac{1}{5(y^{1/5})^4} \\ &= \frac{1}{5y^{4/5}} = \frac{1}{5}y^{-4/5}.\end{aligned}$$

Sjekk:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^{1/5} &= \frac{1}{5}y^{1/5-1} \\ &= \frac{1}{5}y^{-4/5}.\end{aligned}$$

Det stemmer.

Oppgave 10 La funksjonen f være gitt ved $f(x) = x^3 - x$. Finn et punkt x slik at den lineære tilnærminga til f i punktet x er en konstant funksjon. Skisser grafene til f og den lineære tilnærminga til f i samme koordinatsystem.

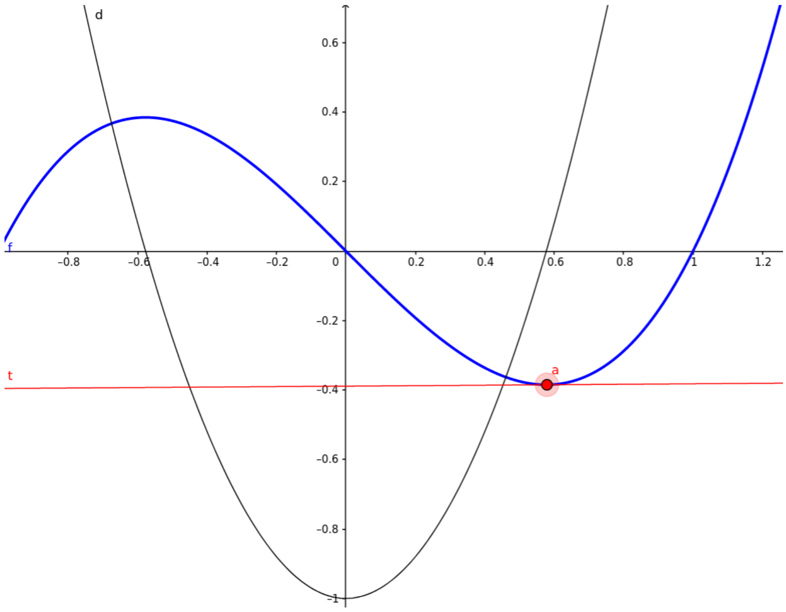
Løsning
Den lineære tilnærminga utvikla i punkt x_0 er

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Den er en konstant (funksjon) hvis og bare hvis $f'(x_0) = 0$. Så vi trenger å løse likninga $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} & & 0 = f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ &\Longrightarrow & 3x^2 &= 1 \\ &\Longrightarrow & x^2 &= 1/3 \\ &\Longrightarrow & x &= \pm 1/\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vi velger $x = 1/\sqrt{3}$ (fordi positive tall er enklere å bruke enn negative).



Figur 1: Den blå kurven er grafen til f. Den svarte er f'. Den røde er tilnærminga.