

**EKSAMEN MA0001 HØST 2018 — LØSNINGSFORSLAG**

**Oppgave 1.** Vi ser på  $f(x) = 1/(\ln(x) - 1)$ . Vi vet at  $\ln(x)$  er definert kun for  $x > 0$  og vi må forsikre oss om at  $\ln(x) - 1 \neq 0$ , altså  $x \neq e$ . Den største mulige definisjonsmengden til  $f$  er alle positive tall bortsett fra  $e$ . Ekvivalent,  $D_f = (0, e) \cup (e, \infty)$ .

**Oppgave 2.** La  $h = f - g$ . Siden  $f$  og  $g$  er kontinuerlige er også  $h$  kontinuerlig. Vi ser at

$$h(1) = f(1) - g(1) = 2 - 1 = 1 \quad \text{og} \quad h(2) = f(2) - g(2) = 1 - 2 = -1.$$

For hvert tall  $-1 < L < 1$  sier skjæringssetningen derfor at det finnes minst ett tall  $1 < c < 2$  slik at  $h(c) = L$ . Vi tar  $L = 0$ , som gir at  $h(c) = 0$  og dermed  $f(c) = g(c)$ .

**Oppgave 3.** Ved kjerneregelen,

$$f'(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln(x))}{x}.$$

**Oppgave 4.** Ved produktregelen,

$$f'(x) = (x + e^x)(-\sin(x)) + (1 + e^x)\cos(x) = \cos(x) - x\sin(x) + e^x(\cos(x) - \sin(x)).$$

**Oppgave 5.** Vi bruker L'Hôpitals regel, og får at

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^3-1} - 1}{x^3 - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^3-1} 3x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^3-1} = 1.$$

**Oppgave 6.** Vi deriverer  $y^3 + y = x^3 - 2x + 1$  implisitt med hensyn på  $x$ , som gir

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2 \quad \iff \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2}{3y^2 + 1}.$$

Så setter vi inn  $(x, y) = (-1, 1)$  som gir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot (-1)^2 - 2}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

Kurven har stigningstall  $m = 1/4$  i punktet  $(x, y) = (-1, 1)$ . Ligningen for tangenten er

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x - (-1)) \quad \iff \quad y = \frac{x + 5}{4}.$$

(Det er greit å skrive  $y' = \frac{dy}{dx}$ .)

**Oppgave 7.** Vi vil finne andre grads Taylor-polynom til  $f(x) = 2e^{\sqrt{x}-1}$  om  $a = 1$ . Formelen er

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2.$$

Vi deriverer med kjerneregelen og brøkregelen:

$$f'(x) = 2e^{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \left( \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}-1}(\sqrt{x} - 1)}{2x^{3/2}}$$

Altså får vi at  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = 1$  og  $f''(1) = 0$ . Da er  $P_2(x) = 2 + (x - 1)$ .

**Oppgave 8.** Vi anti-derivere og bruker at  $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ , som gir

$$\int \left( \frac{1}{3x} + \sqrt[3]{3x} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \sqrt[3]{3} \int \sqrt[3]{x} dx = \frac{\ln|x|}{3} + \frac{3\sqrt[3]{3}}{4} x^{4/3} + C = \frac{\ln|x|}{3} + \frac{(3x)^{4/3}}{4} + C.$$

**Oppgave 9.** For å regne ut arealet mellom grafen til  $y = f(x)$  og  $y = g(x)$  må vi finne ut hvor  $f(x) \geq g(x)$  og hvor  $g(x) \geq f(x)$ . For å finne skjæringspunktene løser vi derfor

$$f(x) = g(x) \iff h(x) + x + 1 = h(x) + 2 \iff x = 1.$$

Siden grafene til funksjonene skjærer hverandre kun i  $x = 1$  må vi sjekke til venstre og til høyre for dette punktet. Vi ser at

$$f(0) = h(0) + 1 < h(0) + 2 = g(0),$$

så  $g(x) \geq f(x)$  når  $x \leq 1$ . Vi ser at

$$f(2) = h(2) + 3 > h(2) + 2 = g(2),$$

så  $f(x) \geq g(x)$  når  $x \geq 1$ . Arealet mellom grafene på intervallet  $[0, 2]$  blir altså

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

**Oppgave 10.** Hintet forteller oss at  $F(x) = x \sin(x)$  er en anti-derivert av  $f(x) = \sin(x) + x \cos(x)$ . For å regne ut integralet skriver vi om

$$x \cos(x) = f(x) - \sin(x).$$

Siden  $\cos(x)$  er en anti-derivert av  $-\sin(x)$  får vi derfor at

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx &= \int_0^{\pi/2} (f(x) - \sin(x)) dx = \left[ F(x) + \cos(x) \right]_0^{\pi/2} \\ &= F(\pi/2) + \cos(\pi/2) - (F(0) + \cos(0)) = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

(Det er også greit å løse oppgaven med delvis integrasjon selv om det ikke er pensum i MA0001.)