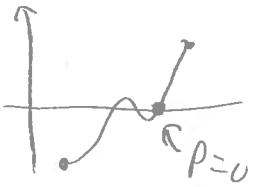
Oppg. 6 Antallet løsninga til $x^3 - 3x + 1 = 0$ på $[-2, 2]$.

$P(x) = x^3 - 3x + 1$

Skjæringssetningen: $P(x_1) < 0$ og $P(x_2) > 0$

$\Rightarrow$ det finnes $x$ mellom $x_1$ og $x_2$ med $P(x) = 0$.




Vi fant ut at

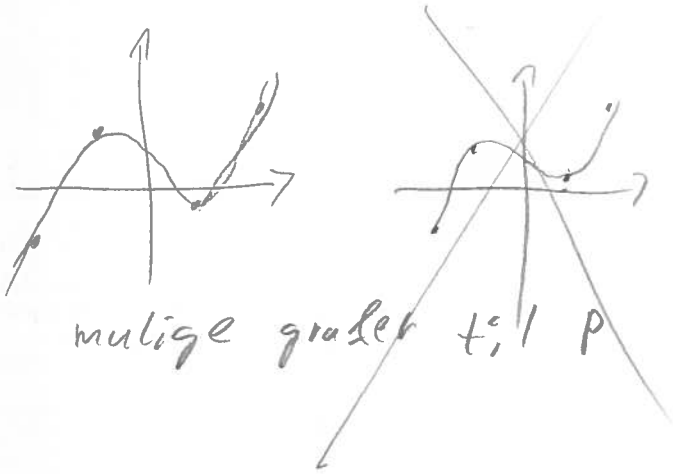
$P(-2) < 0$ og $P(2) > 0$.

---

Finner minimuma og maksima til funksjonen:

$P'(x) = 3x^2 - 3$. Løser $P'(x) = 0$:

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$



mulige grafer til P

| $x$ | $P(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $-1$ |
| $-1$ | $3$ |
| $1$ | $-1$ |
| $2$ | $3$ |

Funksjonen går fra positiv til negativ (eller fra neg til pos) verdier på intervall $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ og $(1, 2)$.

Skjæringssetningen $\Rightarrow$ det må være et punkt på hvert intervall hvor $P(x) = 0$. Dvs. 3 løsninger til likninga.

Sjekk: Skisser grafen.

Oppg 7: « Finn andre grads taylorpolynom til funksjonen $f(x) = e^{(e^x - 1)}$ i punktet $a=0$.

Løsning: Først vi regner ut deriverte

$$f'(x) = e^{e^x - 1} \cdot \frac{d}{dx}(e^x - 1) = e^x \cdot e^{(e^x - 1)} = e^{e^x + x - 1}$$

kjerneregel

$$f''(x) = e^{e^x + x - 1} \cdot \frac{d}{dx}(e^x + x - 1) = e^{e^x + x - 1} \cdot (e^x + 1).$$

Nå: $f(0) = e^{(e^0 - 1)} = e^{1-1} = e^0 = 1$

$f'(0) = e^{(e^0 - 0 - 1)} = 1$

$f''(0) = \underbrace{e^{(e^0 - 0 - 1)}}_{=1} \cdot \underbrace{(e^0 + 1)}_{=2} = 2.$

Nå får vi taylorpolynomet:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!} \cdot f''(0) \cdot (x - 0)^2$$

$$= 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^2$$

$$= 1 + x + x^2.$$

Sjekk: Bør være $f(x) \approx P_2(x)$ når $x \approx 0$.

Oppg 8. « Finn alle funksjoner som oppfyller $f''(x) = 6x$. »

Løsning: Ubestemte integral / anti-deriverte to ganger.

$$f'(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + C_1$$

$$\underline{\underline{f(x)}} = \int (3x^2 + C_1)\,dx = \underline{\underline{x^3 + C_1 x + C_2}},$$

hvor $C_1$ og $C_2$ er hva som helst reelle tall.

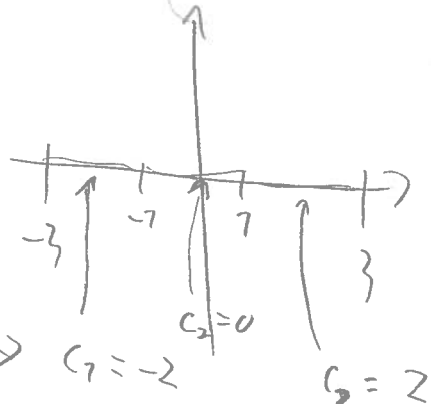
Sjekk: Bør ha: $\frac{d^2}{dx^2}(x^3 + C_1 x + C_2) = 6x$.

Oppg. 9 « Regn ut midtpunkt-estimatet $M_3$ for integralet $\int_{-3}^{3} x^2 \cos(\pi x)\,dx$. »

Løsning: $M_3 = s\left(f(c_1) + f(c_2) + f(c_3)\right)$, hvor

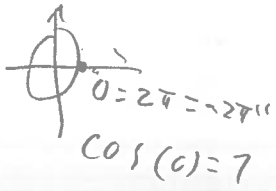
$s = \frac{b-a}{n} = \frac{3-(-3)}{3} = 2$ og
$n=3$

$c_j$ i bildet.




Nå $M_3 = 2\left(f(-2) + f(0) + f(2)\right)$

$= 2\left(4\cos(-2\pi) + 0 + 4\cos(2\pi)\right)$



$= 2(4 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 16.$

$\cos(2\pi) = 1$
$\cos(-2\pi) = 1$

<u>Sjekk</u>: Regn ut integral (hvis mulig), skisser og estimere, ... ikke så lett.

<u>Oppg 10</u> « Finn gjennomsnittsverdien til funksjonen $f(x) = \sqrt{3x} + \sin(\pi x)$ på intervallet $0 \le x \le 3$. »

<u>Løsning</u>: Verdien er $\frac{1}{3-0}\int_0^3 \left(\sqrt{3x} + \sin(\pi x)\right) dx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \sqrt{3}\, x^{1/2}\, dx + \frac{1}{3}\int_0^3 \sin(\pi x)\, dx$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^3 + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{\pi} \cdot (-\cos(\pi x))\right]_0^3$$

$\frac{d}{dx}(\cos) = -\sin$

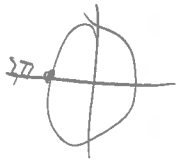
$$\boxed{\frac{1}{3/2} = 1 : \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3/2} x^{3/2} - \frac{1}{3\pi} \cos(\pi x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3\pi} \cos(\pi x)$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2} - \frac{1}{3\pi} \cos(\pi x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \left[ x^{3/2} \right]_0^3 - \frac{1}{3\pi} \left[ \cos(\pi x) \right]_0^3$$



$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( 3^{3/2} - 0^{3/2} \right) - \frac{1}{3\pi} \left( \underbrace{\cos(3\pi)}_{=-1} - \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right)$$

$$= \frac{2}{\cancel{3^1 \cdot 3^{1/2}} \cdot \cancel{3^{3/2}}} - \frac{1}{3\pi} \left( \underbrace{-1-1}_{=-2} \right) = 2 + \frac{2}{3\pi}.$$

<u>Sjekk:</u> Integral kan sjekkes med å derivere grafen?

## Eksempel på invers funksjon

Finn invers funksjonen til $f(x) = x^5 - 1$ på intervallet $[2, \infty)$.

definert

Løser $x$ fra $y = f(x) = x^5 - 1$

$$\Leftrightarrow y + 1 = x^5$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt[5]{y+1}}_{=(y+1)^{1/5}} = x.$$

Vi har $f^{-1}(x) = (x+1)^{1/5}$. <u>Verdimengden</u>: $[2, \infty)$

Def. mengde til $f^{-1}$ er verdimenge til $f$, som er:

$x \geq 2$ $\rightsquigarrow$ for $x^5 - 7$ gjør noe

$\Rightarrow x^5 \geq 2^5 = 32 \Rightarrow \underbrace{x^5 - 7}_{=f(x)} \geq 31$, så

verdimengden er $[31, \infty)$.

Def. mengden til $f^{-1}$ er $[31, \infty)$.

---

Derivere til $f^{-1}$, eksempel fortsetter. To måter

(1) $f^{-1}(x) = (x+7)^{1/5}$, så

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\left((x+7)^{1/5}\right) = \frac{1}{5}(x+7)^{-4/5}$$

~~Ellers (2): Formelarket: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.~~

~~her $y = f(x) = x^5 - 7$, $f'(x) = 5x^4$.~~

~~$x = f^{-1}(y)$ så $f'(x) = f'(f^{-1}(y)) = 5 \cdot (f^{-1}(y))^4$~~

~~$= 5((x+7)^{1/5})^4$~~

~~$= 5(x+7)^{4/5}$.~~

~~Nå $f^{-1}(y) = \frac{1}{5(x+7)^{4/5}}$~~

(2) Formelarket: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, hvor $x = f^{-1}(y) = (y+7)^{1/5}$.

$f'(x) = 5x^4$

så $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{5(f^{-1}(y))^4} = \frac{1}{5 \cdot ((y+7)^{1/5})^4} = \frac{1}{5(y+7)^{4/5}}$.

sammensatt funksjon, $(f' \circ f^{-1})(y)$

Svaret kan skrives med $x$ i stedet for $y$:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5(x+1)^{4/5}} \quad \left( = \frac{1}{5}(x+1)^{-4/5} \right).$$

Det samme som 1!