

## Eksempler

$$a_n = \frac{3n^4 - 77}{6n^4 + 70n + 2} = \frac{3 \overbrace{-77n^{-4}}^{\rightarrow 0 \text{ n\u00e5r } n \rightarrow \infty}}{6 \underbrace{+70n^{-3} + 2n^{-4}}_{\rightarrow 0 \text{ n\u00e5r } n \rightarrow \infty}} \rightarrow \frac{3}{6} \text{ , s\u00e5 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$b_k = \frac{-72k^3 + k}{k+4} = \frac{-72k^2 + 1}{1 + 4/k} \text{ , s\u00e5}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (-72k^2 + 1) = -\infty$$

div konvergerer mot  $-\infty$ .

$$a_k = \sqrt{k+3} - \sqrt{k} \stackrel{\text{kvadrats\u00e9ning}}{=} \frac{(\sqrt{k+3} - \sqrt{k})(\sqrt{k+3} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k}} = \frac{3}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k}} \text{ , s\u00e5}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k}} = 0 \text{ ,}$$

f\u00f8r fordi nevneren  $\rightarrow \infty$ .

$$b_n = \frac{\sin n}{n} \text{ , Bruker ulikhet } -1 \leq \sin n \leq 1.$$

$$\text{Det g\u00e5r } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ ,}$$

$\underbrace{\quad}_{\rightarrow 0 \text{ n\u00e5r } n \rightarrow \infty} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{\rightarrow 0 \text{ n\u00e5r } n \rightarrow \infty}$

Her ogs\u00e5  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ . (S\u00e6rligstelem)

## Egenskaper

Anta  $a_n$  og  $b_n$  er konvergente f\u00f8lger.  
La  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ hvis } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

## Rekursjon

Y sjakk-eksemplet vi hadde

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 = 2 \cdot 1$$

$$a_3 = 4 = 2 \cdot 2$$

$$a_4 = 8 = 2 \cdot 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = 2 \cdot a_{n-1} \end{array} \right.$$

Det her heter rekursiv definisjon til følgen.

Vi trenger også initialverdi  $a_0$ .

### Ekspontsiell rekursjon

La  $a_0 = b$  og  $a_{n+1} = c a_n$ . Da blir

$$a_1 = c a_0 = c b$$

$$a_2 = c a_1 = c^2 b$$

$$a_3 = c a_2 = c^3 b$$

$$\vdots$$

$$a_n = c^n b.$$

Hvis  $c > 1$ , eksemp. vekst.

$\rightarrow c < 1$ , eksemp. minsking.

## Forklaring (gange med $\frac{1}{5}$ ).

$$70 = 70 \cdot 1 = 70 \cdot \frac{5}{5} = 70 \underbrace{\frac{x^2 - e^x - \sin x}{x^2 - e^x - \sin x}}_{=1}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = 1$$

---

## Fikspunkt (eng. fixed point)

Rekursiv følge  $a_{n+1} = f(a_n)$  har et fikspunkt  $a$  hvis og bare hvis  $a = f(a)$ .

• Eksempel:

$$\bullet a_{n+1} = f(a_n) = 1 + \frac{a_n}{2}. \text{ Løs } a = f(a)$$

$$\Leftrightarrow a = 1 + \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2.$$

Prøv rekursjon med kalkulator.

Følgen konvergerer mot 2 med alle initialverdier  $a_0 \in \mathbb{R}$ .

$$\bullet b_{n+1} = -2b_n \quad (f(x) = -2x).$$

$$\text{Fikspunkt: } a = -2a \Leftrightarrow a = 0.$$

Følgen konvergerer nesten aldri.

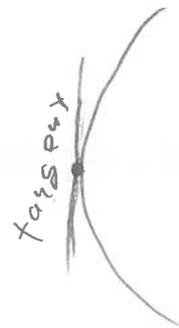
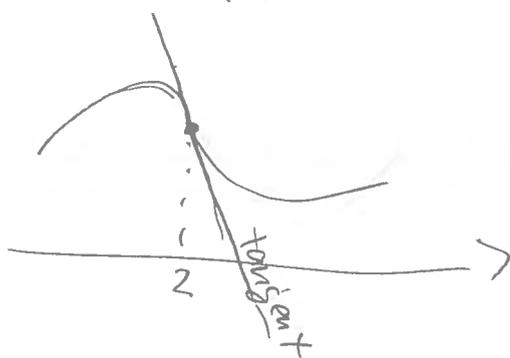
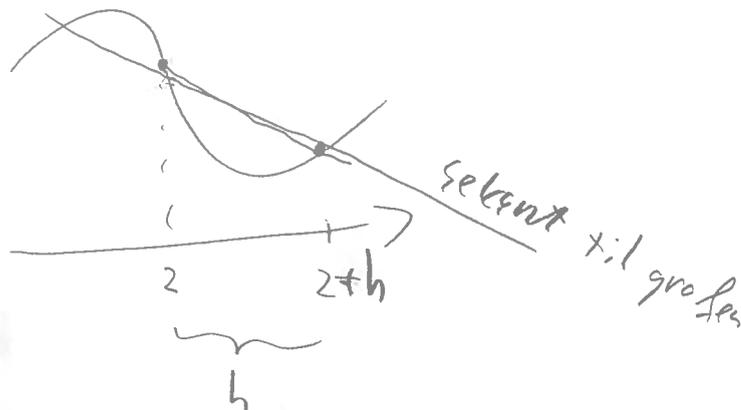
Prøv!

- Hvis en rekursiv følge konvergerer, så grenseverdien er et fikspunkt.
- De kan finnes flere fikspunkt.

- $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$ : rekursjon kan være en funksjon av flere forrige verdier.

## Grenseverdier til funksjoner

Motivasjon: Sekant  $\rightarrow$  tangent  
(og dermed deriverte)



Likninga til sekanten:  $y - f(z) = m(x - z)$

$$\begin{aligned} \text{Velger } x = z+h: \quad m &= \frac{f(z+h) - f(z)}{z+h - z} \\ &= \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \end{aligned}$$

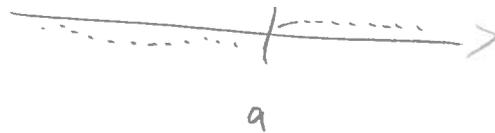
Likninga til tangent:  $h=0$  virker ikke.  
Grenseverdien når  $h \rightarrow 0$ . Så  $m \rightarrow$  deriverte.

"Definisjon": Grenseverdien av  $f(x)$

når  $x$  går mot  $a$ , er et tal  $L$ ,  
skrives  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,

dersom  $f(x)$  nærmer seg  $L$  når  
 $x$  nærmer seg  $a$ .

OBS! Grenseverdien må tas fra  
begge sidene/retningene



$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$   
fra venstre  
fra negativ

$\lim_{x \rightarrow a^+}$   
høyre  
positiv