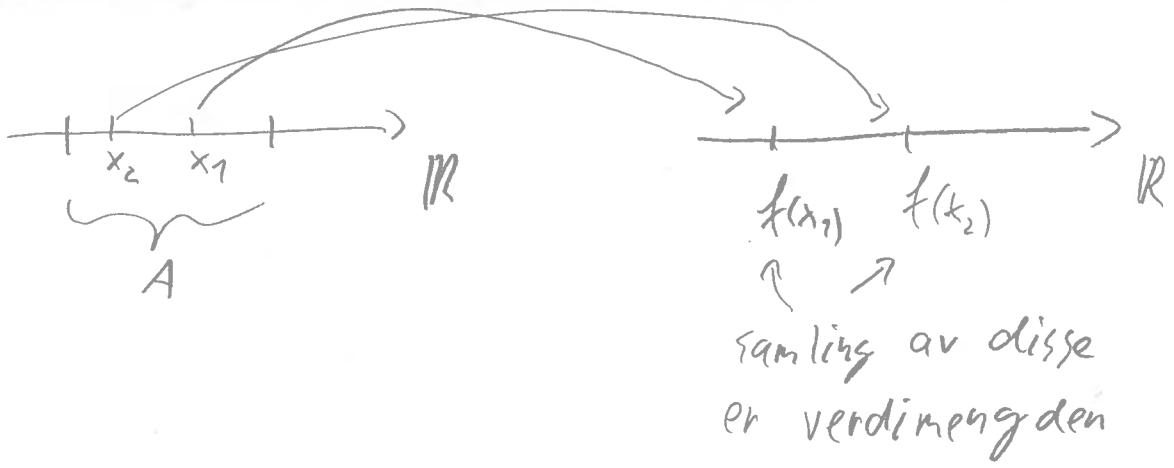
Definisjon (funksjon eller avbildning)

En funksjon f fra en mengde A til de reelle talla $\mathbb{R}$, er en regel som som tilorder hvert tall $x \in A$ til ett tall $f(x) \in \mathbb{R}$.

- Skrives: $f : A \to \mathbb{R}$
- $f(x)$ heter <u>funksjonsverdien</u> i x.
- A er <u>definisjonsmengden</u> til f. (eng. domain)
- Mengden $\{f(x) \; ; \; x \in A\}$ heter verdimengden (engl. range) til f. Det skrives $f(A)$. Det er samlingen av alle verdier f tar.



Eksempler

- $f : [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$

definisjonsmengden. Verdimengden er $f([2,3]) = [3, 4]$.

- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)$ = største heltall, som er mindre enn eller lik x. Verdimengden er alle heltall (eller $\mathbb{Z}$, etter tysk Zahl)

OBS! To funksjoner, $f: A \to \mathbb{R}$ og $g: B \to \mathbb{R}$, er like når $A = B$ og for alle $x \in A$ (eller $x \in B$), $f(x) = g(x)$.

Vi vil ofte finne et største definisjonsområde til en formel.

<u>Eksempler</u>

- $f_1(x) = x + 1$. Definisjonsområden er $\mathbb{R}$.
- $f_2(x) = x^2$. ——— " ———
- $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$. OK, når $x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1$. Definisjonsmengden er $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. union
- $h(x) = \sqrt{x+1}$. Må ha $x + 1 \geq 0$, så definisjonsmengden er $[-1, \infty)$.

<u>Grafen til en funksjon</u>

La $f: A \to \mathbb{R}$. Grafen til f er kurven $y = f(x)$, eller $\{(x, y) \; ; \; y = f(x) \text{ og } x \in A\}$.

punkt på planen

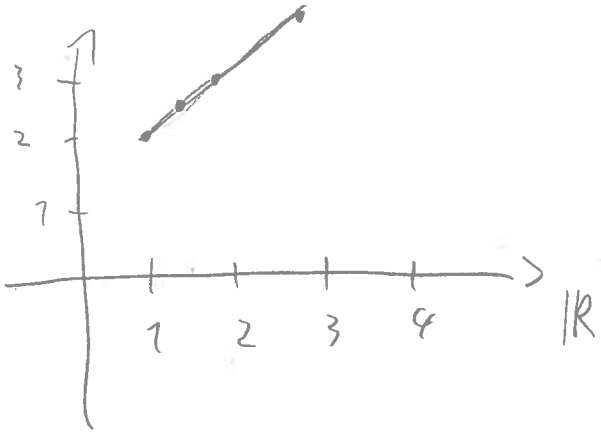
Ei <u>skisse</u> av grafen kan hjelpe å forstå funksjonen, men skal <u>ikke</u> brukes til å løse

problem uten regning.

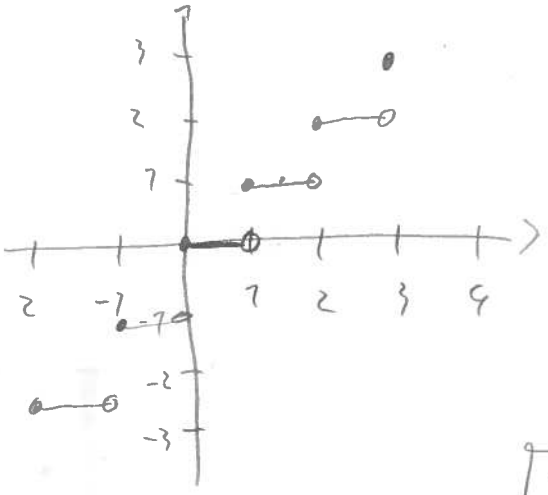
Eksempler

- $f: [1,3] \to \mathbb{R}$,

  $f(x) = x + 1$



- $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ største heltall $\leq x$



definisjonsmengde

= f, — område

bruk det

(a, b) åpent $\quad a \notin (a,b)$

$b \notin (a,b)$

alle x

$a < x < b$

Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

reelle tall

n er heltall, positiv eller null

Største potens er graden til polynomet.

grad null, polynom konstant.

graden er 1, polynomet er lineært.

Definisjonsmengden er $\mathbb{R}$.

Rasjonale funksjoner

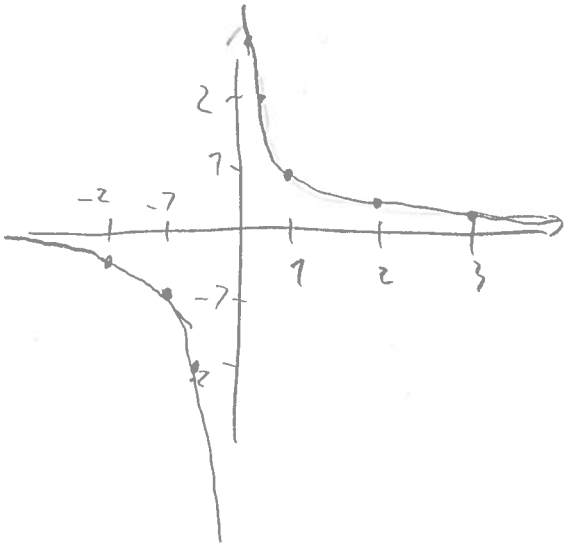
$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, der P og Q er polynomer.

<u>Definisjonsmengden:</u> Alle tall $x \in \mathbb{R}$ med $Q(x) \neq 0$.

$$\{x \in \mathbb{R} \; ; \; Q(x) \neq 0\}$$

<u>Eksempler:</u>

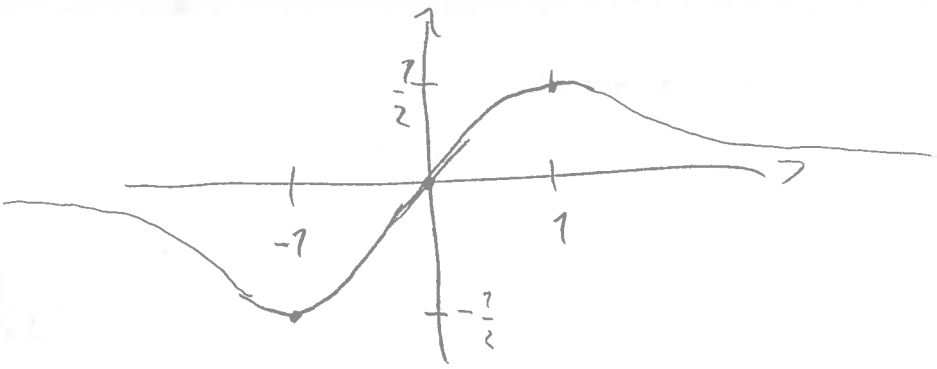
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Def.mengden $x \neq 0$.
Verdimengden $x \neq 0$.

- $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Def.mengden er $\mathbb{R}$.
Verdimengden: Ikke så enkelt å se.



<u>Verdimengden:</u> La $y \in \mathbb{R}$. Vi prøver å finne $x \in \mathbb{R}$ så at $g(x) = y$.

$$g(x) = y \iff \frac{x}{1+x^2} = y$$

① Hvis $y = 0$, så $x = 0$ er ok, fordi $g(0) = 0$.

② Anta $y \neq 0$ og skriv $g(x) = y$ som

$$1 + x^2 = \frac{x}{y} \iff x^2 - \frac{x}{y} + 1 = 0.$$

③ ABC-formelen gir

$$x = \frac{\frac{1}{y} \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} - 4}}{2}.$$

Det finnes ei løsning (eller to) hvis og bare hvis diskriminanten $\frac{1}{y^2} - 4$ er positiv eller null, dvs. $\frac{1}{y^2} - 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 4y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq \frac{1}{4}$$

kvadratrut av begge sider

$$\Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{unntatt } y \neq 0)$$

④ Vi har vist at $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ hvis og bare hvis det finnes én eller flere x med $g(x) = y$.
Det betyr at verdimengden er $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

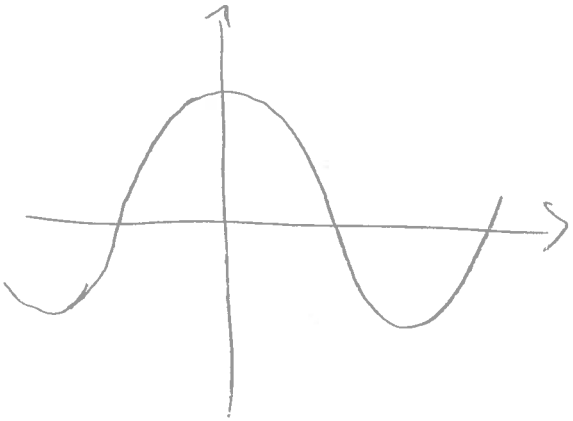
Jevn og odde funksjoner

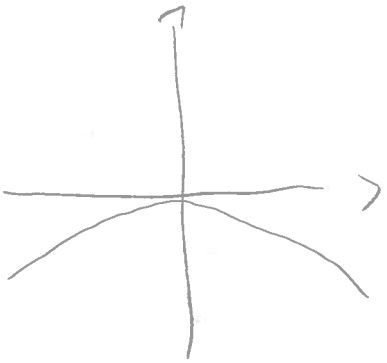
Jevn: $f(x) = f(-x)$ for alle x
Odde: $-f(x) = f(-x)$ —"—

Jevne eksempler: $\cos(x)$, $|x|$, konstant, $x^2, x^4, x^6, \ldots$

Odde eksempler: $\sin(x)$, $\tan(x)$, x, x^3, x^3, x^5, ...

Jevne grafer:





Odde grafer