$\boxed{1}$ Avgjør om det uekte integralet konvergerer. Hvis ja, regn det ut.

$$\int_{12}^{\infty} x^{-3/2} \mathrm{d}x$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\int_{12}^{\infty} x^{-3/2} \mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty} \int_{12}^{a} x^{-3/2} \mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to\infty} [-2x^{-1/2}]_{12}^{a} \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(-2a^{-1/2} - (-2 \cdot 12^{-1/2})\right) \\
&= 2 \lim_{a\to\infty} \left(-a^{-1/2} + 12^{-1/2}\right) \\
&= 2 \left(\lim_{a\to\infty} -a^{-1/2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \\
&= 2 \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \\
&= 1/\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Integralet konvergerer, fordi grenseverdien konvergerer.

$\boxed{2}$ Finn den største definisjonsmengden til funksjonen

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{(x-3)^2}\right).$$

Løsning:
Logaritmen er definert når innholdet er positiv. Vi må også se at vi ikke deler med null.

Vi deler med null hvis og bare hvis $(x-3)^2 = 0 \iff x = 3$.

Fordi $(x-3)^2 \geq 0$, påvirkers ikke fortegnet til $\frac{x}{(x-3)^2}$, som er positivt hvis og bare hvis $x > 0$ (og uttrykket er definert).

Totalt får vi at definisjonsmengden til funksjonen er alle positive tall unntatt tre. I mengdenotasjon: $(0,3) \cup (3,\infty)$ eller $(0,\infty) \setminus \{3\}$.

$\boxed{3}$ Deriver inversfunksjonen til $h(x) = 27/x^3$.

Løsning:
Her kan vi bruke formelen til den deriverte an inversfunksjonen, eller vi kan regne ut inversen til funksjonen og så derivere det. Vi tar det siste alternativet her.

$$\begin{aligned} & y = 27/x^3 \\ \iff & x^3 = 27/y \\ \iff & x = 3y^{-1/3}. \end{aligned}$$

Dette gir formelen til inversfunksjonen: $h^{-1}(x) = 3x^{-1/3}$. Vi tar den deriverte av den:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 3x^{-1/3} &= 3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{-1/3} \\ &= 3 \cdot \frac{-1}{3} x^{-1/3-1} \\ &= -x^{-4/3}. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Regn ut integralet nedenfor og forklar hvordan analysens fundamentalteorem brukes i regningen.

$$\int_{-4}^{4} \left(x^3 + e^{5x} \right) \mathrm{d}x$$

Løsning:
x^3 er en jevn funksjon, så $\int_{-4}^{4} x^3 \mathrm{d}x = 0$. Det forenkler regningen:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{4} \left(x^3 + e^{5x} \right) \mathrm{d}x &= \int_{-4}^{4} e^{5x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5} \int_{-4}^{4} 5e^{5x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5} \left[e^{5x} \right]_{-4}^{4} \\ &= \frac{1}{5} \left(e^{20} - e^{-20} \right). \end{aligned}$$

Fundamentalteoremet brukes når vi setter verdier inn i den antideriverte e^{5x} (antideriverte til $5e^{5x}$) i stedet for å bruke geometriske argumenter eller Riemann-summer.

$\boxed{5}$ Hva er verdimengden til funksjonen f definert på $(0, \infty)$ med formelen $f(x) = \sqrt{x+1}$?

Løsning:
Vi vil finne y slik at def finnes $x > 0$ med $y = f(x)$.

$x > 0 \iff x + 1 > 1 \iff \sqrt{x+1} > \sqrt{1} = 1$. Her $y = \sqrt{x+1}$.

Dvs. f tar alle verdier større enn én. Altså er verdimengden $(1, \infty)$.

$\boxed{6}$ Regn ut den deriverte til $f(x) = \sin(3e^x + 2x)$.

Løsning:
Vi definerer $h(x) = \sin x$ og $g(x) = 3e^x + 2x$. De gir $h(g(x)) = f(x)$. Kjerneregelen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\ &= \cos(g(x))\,(3e^x + 2) \\ &= (3e^x + 2) \cdot \cos(3e^x + 2x)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Gi den lineære tilnærminga til funksjonen $f(x) = \ln(2x)$ i punktet $x = 3$. Skisser f og tilnærminga i det samme koordinatsystemet.

Løsning:
$f(x) = \ln 2 + \ln x$, så $f'(x) = 1/x$. Derfra får vi tilnærminga

$$L(x) = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = \ln(6) + \frac{1}{3}(x - 3)\,.$$

$\boxed{8}$ Undersøk om sirkelen $(x+3)^2 + y^2 - 2y = 3$ skjærer koordinataksene $y = 0$ og $x = 0$. Regn ut algebraisk og skisser geometrisk.

Løsning:
Likninga kan omskrives:

$$\begin{aligned} & (x+3)^2 + y^2 - 2y = 3 \\ \iff \quad & (x+3)^2 + y^2 - 2y + 1 = 4 \\ \iff \quad & (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2^2. \end{aligned}$$

Sentrumet til sirkelen er dermed $(-3, 1)$ og radiusen er 2. Herfra, eller fra bildet, ses det at y-aksen ikke skjæres, men sirkelen skjærer x-aksen (i to punkt).

For å regne det samme ut, vi velger først $y = 0$ i likninga og får

$$\begin{aligned} & (x+3)^2 + 1 = 4 \\ \iff \quad & (x+3)^2 = 3 \\ \iff \quad & x + 3 = \pm\sqrt{3} \\ \iff \quad & x = \pm\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

Dvs. at det finnes x-verdier som tilhører sirkelen når $y = 0$, som betyr at sirkelen skjærer x-aksen.

Med $x = 0$ får vi

$$\begin{aligned} & 9 + (y-1)^2 = 4 \\ \iff \quad & (y-1)^2 = -5, \end{aligned}$$

men denne likninga har ingen løsninger: $(y-1)^2 \geq 0$ for alle reelle tall y. Så y-aksen skjæres ikke.

$\boxed{9}$ Regn ut grenseverdien $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{(2x+1)\cdot(x-3)}{e^{x-3}-1}$.

Løsning:
Ved å sette inn $x = 3$ får vi $\frac{0}{0}$, som gir ingen mening. Telleren og nevneren er (uendelig mange ganger) deriverbare funksjoner, så l'Hôpitals regel gjelder. Produktregelen i telleren og kjerneregelen i nevneren gir deretter

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{(2x+1)\cdot(x-3)}{e^{x-3}-1} &= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((2x+1)\cdot(x-3)\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x-3}-1\right)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)\cdot(x-3) + (2x+1)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-3)}{e^{x-3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-3) - 0} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{2\,(x-3) + (2x+1)\cdot 1}{e^{x-3}\cdot 1} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3}\left(2\,(x-3) + (2x+1)\right)}{\lim_{x\to 3} e^{x-3}} \\
&= \frac{0+7}{e^0} = 7.
\end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Finn et reelt tall $a \in \mathbb{R}$ slik at funksjonen g nedenfor er kontinuerlig.

$$g(x) = \begin{cases} 10^x + a, & \text{hvis } x < -2 \\ \frac{1}{x+12}, & \text{hvis } x \geq -2 \end{cases}$$

Løsning:
Først, $10^x + a$ er kontinuerlig på mengden $(-\infty, -2)$, fordi den er en eksponential funskjon og å legge til en konstant gjør ikke noe med kontinuiteten. Uttrykket $1/(x+12)$ er også kontinuerlig som rasjonell funksjon på $(-2, \infty)$, fordi nevneren ikke blir null der. Det er nok å se på kontinuitet i punkt $x = -2$.

For funksjonen g å være kontinuerlig i $x = -2$ må den være definert og $g(-2) = \lim_{x\to -2} g(x)$. Vi har allerede

$$g(-2) = \frac{1}{-2+12} = \frac{1}{10} \text{ og } \lim_{x\to -2^+} g(x) = g(-2).$$

Vi må regne ut grenseverdien fra negativ retning/venstre og velge a slik at det er lik $g(-2) = 1/10$.

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \lim_{x\to -2^-} 10^x + a = 10^{-2} + a = \frac{1}{100} + a.$$

Vi må velge a slik at $1/10 = 1/100 + a \iff a = 1/10 - 1/100 = 9/100$.