



- 1 Avgjør om det uekte integralet konvergerer. Hvis ja, regn det ut.

$$\int_{12}^{\infty} x^{-3/2} dx$$

Løsning:

$$\begin{aligned} \int_{12}^{\infty} x^{-3/2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{12}^a x^{-3/2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} [-2x^{-1/2}]_{12}^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} (-2a^{-1/2} - (-2 \cdot 12^{-1/2})) \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow \infty} (-a^{-1/2} + 12^{-1/2}) \\ &= 2 \left(\lim_{a \rightarrow \infty} -a^{-1/2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\ &= 2 \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\ &= 1/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Integralet konvergerer, fordi grenseverdien konvergerer.

- 2 Finn den største definisjonsmengden til funksjonen

$$f(x) = \ln \left(\frac{x}{(x-3)^2} \right).$$

Løsning:

Logaritmen er definert når innholdet er positiv. Vi må også se at vi ikke deler med null.

Vi deler med null hvis og bare hvis $(x-3)^2 = 0 \iff x = 3$.

Fordi $(x-3)^2 \geq 0$, påvirker ikke fortegnet til $\frac{x}{(x-3)^2}$, som er positivt hvis og bare hvis $x > 0$ (og uttrykket er definert).

Totalt får vi at definisjonsmengden til funksjonen er alle positive tall unntatt tre. I mengdenotasjon: $(0,3) \cup (3,\infty)$ eller $(0,\infty) \setminus \{3\}$.

3 Deriver inversfunksjonen til $h(x) = 27/x^3$.

Løsning:

Her kan vi bruk formelen til den deriverte an inversfunksjonen, eller vi kan regne ut inversen til funksjonen og så derivere det. Begge er fine.

Å derivere inversfunksjonen:

$$\begin{aligned} & y = 27/x^3 \\ \iff & x^3 = 27/y \\ \iff & x = 3y^{-1/3}. \end{aligned}$$

Dette gir formelen til inversfunksjonen: $h^{-1}(x) = 3x^{-1/3}$. Vi tar den deriverte av den:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 3x^{-1/3} &= 3 \frac{d}{dx} x^{-1/3} \\ &= 3 \cdot \frac{-1}{3} x^{-1/3-1} \\ &= -x^{-4/3}. \end{aligned}$$

Med formelarket, vi trenger $h^{-1}(y) = 3y^{-1/3}$ (som oppe) og $h'(x) = -81x^{-4}$. Så har vi

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(y) &= \frac{1}{h'(x)} = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{h'(3y^{-1/3})} = \frac{1}{-81(3y^{-1/3})^{-4}} \\ &= -y^{-4/3}. \end{aligned}$$

Dvs. $(h^{-1})'(x) = -x^{-4/3}$.

4 Regn ut integralet nedenfor og forklar hvordan analysens fundamentalteorem brukes i regningen.

$$\int_{-4}^4 (x^3 + e^{5x}) dx$$

Løsning:

x^3 er en odde funksjon, så $\int_{-4}^4 x^3 dx = 0$. Det forenkler regningen:

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 (x^3 + e^{5x}) dx &= \int_{-4}^4 e^{5x} dx \\ &= \frac{1}{5} \int_{-4}^4 5e^{5x} dx \\ &= \frac{1}{5} [e^{5x}]_{-4}^4 \\ &= \frac{1}{5} (e^{20} - e^{-20}). \end{aligned}$$

Fundamentalteoremet brukes når vi setter verdier inn i den antideriverte e^{5x} (antideriverte til $5e^{5x}$) i stedet for å bruke geometriske argumenter eller Riemann-summer.

5] Hva er verdimengden til funksjonen f definert på $(0, \infty)$ med formelen $f(x) = \sqrt{x+1}$?

Løsning:

$$x > 0 \iff x + 1 > 1 \iff \sqrt{x+1} > \sqrt{1} = 1.$$

Dvs. $f(x)$ tar alle verdier større enn én. Altså er verdimengden $(1, \infty)$.

Vi trenger ikke å ta hensyn negative verdier i regningen, fordi $x+1$ inn i ruta er positiv, og funksjonen tar ikke-negative verdier, fordi kvadratruta alltid tar ikke-negative verdier. Så allt er positivt i hele regningen.

Ellers kan det brukes at f er voksende, $f(0) = 1$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Fordi f er også kontinuerlig, tar den alle verdier fra 1 til ∞ (men ikke grensene) grunnet skjæringssetningen. Hvis f var ikke voksende, kunne den ta verdier mindre enn $f(0)$. Altså er verdimengden $(1, \infty)$.

6] Regn ut den deriverte til $f(x) = \sin(3e^x + 2x)$.

Løsning:

Vi definerer $h(x) = \sin x$ og $g(x) = 3e^x + 2x$. De gir $h(g(x)) = f(x)$. Kjernerregelen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\ &= \cos(g(x))(3e^x + 2) \\ &= (3e^x + 2) \cdot \cos(3e^x + 2x). \end{aligned}$$

7] Gi den lineære tilnærminga til funksjonen $f(x) = \ln(2x)$ i punktet $x = 3$. Skisser f og tilnærminga i det samme koordinatsystemet.

Løsning:

$f(x) = \ln 2 + \ln x$, så $f'(x) = 1/x$. Derfra får vi tilnærminga (eller approksimasjon, eller første grads taylorpolynom)

$$L(x) = f(3) + f'(3) \cdot (x - 3) = \ln(6) + \frac{1}{3}(x - 3).$$

8] Undersøk om sirkelen $(x+3)^2 + y^2 - 2y = 3$ skjærer koordinataksene $y = 0$ og $x = 0$. Regn ut algebraisk og skisser geometrisk.

Løsning:

Likninga kan omskrives:

$$\begin{aligned} & (x+3)^2 + y^2 - 2y = 3 \\ \iff & (x+3)^2 + y^2 - 2y + 1 = 4 \\ \iff & (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2^2. \end{aligned}$$

Sentrumet til sirkelen er dermed $(-3, 1)$ og radiusen er 2. Herfra, eller fra bildet, ses det at y -aksen ikke skjæres, men sirkelen skjærer x -aksen (i to punkt).

For å regne det samme ut, vi velger først $y = 0$ i likninga og får

$$\begin{aligned} & (x+3)^2 + 1 = 4 \\ \iff & (x+3)^2 = 3 \\ \iff & x+3 = \pm\sqrt{3} \\ \iff & x = \pm\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

Dvs. at det finnes x -verdier som tilhører sirkelen når $y = 0$, som betyr at sirkelen skjærer x -aksen.

Med $x = 0$ får vi

$$\begin{aligned} & 9 + (y-1)^2 = 4 \\ \iff & (y-1)^2 = -5, \end{aligned}$$

men denne likninga har ingen løsninger: $(y-1)^2 \geq 0$ for alle reelle tall y . Så y -aksen skjæres ikke.

En alternativ algebraisk løsning: Likninga til sirkelen er kontinuerlig. De ekstreme x -verdier som likninga tar er -3 ± 2 så begge negative. Så $x = 0$ nås ikke. De ekstreme y -verdier er 1 ± 2 , så en er positiv og annen negativ. Skjæringssetningen forteller at null må røres ved. (Teknisk sett er sirkelen gitt med to likninger, ikke én, så man måtte være forsiktig med skjæringssetningen her. Men den kommer til å virke likevel.)

9 Regn ut grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1) \cdot (x-3)}{e^{x-3} - 1}$.

Løsning:

Ved å sette inn $x = 3$ får vi $\frac{0}{0}$, som gir ingen mening. Telleren og nevneren er (uendelig mange ganger) deriverbare funksjoner, så l'Hôpitals regel gjelder. Omskrivning (eller

produktregelen) i telleren og kjerneregelen i nevneren gir deretter

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1) \cdot (x-3)}{e^{x-3} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{e^{x-3} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{d}{dx}(2x^2 - 5x - 3)}{\frac{d}{dx}(e^{x-3} - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 5 + 0}{e^{x-3} \cdot \frac{d}{dx}(x-3) - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 5}{e^{x-3} \cdot 1} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} e^{x-3}} \\
 &= \frac{4 \cdot 3 - 5}{e^0} = 7.
 \end{aligned}$$

10 Finn et reelt tall $a \in \mathbb{R}$ slik at funksjonen g nedenfor er kontinuert.

$$g(x) = \begin{cases} 10^x + a, & \text{hvis } x < -2 \\ \frac{1}{x+12}, & \text{hvis } x \geq -2 \end{cases}$$

Løsning:

Først, $10^x + a$ er kontinuert på mengden $(-\infty, -2)$, fordi den er en eksponentialfunksjon og å legge til en konstant gjør ikke noe med kontinuiteten. Uttrykket $1/(x+12)$ er også kontinuert som rasjonell funksjon på $(-2, \infty)$, fordi nevneren ikke blir null der, uansett av verdien til a . Det er nok å se på kontinuitet i punkt $x = -2$.

For funksjonen g å være kontinuert i $x = -2$ må den være definert og $g(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} g(x)$. Vi har allerede

$$g(-2) = \frac{1}{-2+12} = \frac{1}{10} \text{ og } \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = g(-2).$$

Vi må regne ut grenseverdien fra negativ retning/venstre og velge a slik at grenseverdien er lik $g(-2) = 1/10$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 10^x + a = 10^{-2} + a = \frac{1}{100} + a.$$

Vi må velge a slik at $1/10 = 1/100 + a \iff a = 1/10 - 1/100 = 9/100$.