

Institutt for matematiske fag

## Eksamensoppgave i **MA0001 Brukerkurs i matematikk A**

**Faglig kontakt under eksamen:** Tommi Brander

**Tlf:** +358 400 414609

**Eksamensdato:** 4. desember 2019

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00–13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 1

**Antall sider vedlegg:** 1

**Kontrollert av:**

**Informasjon om trykking av eksamensoppgave**

**Originalen er:**

**1-sidig**  **2-sidig**

**sort/hvit**  **farger**

**skal ha flervalgskjema**

\_\_\_\_\_  
Dato

\_\_\_\_\_  
Sign



**Oppgave 1** Avgjør om det uekte integralet konvergerer. Hvis ja, regn det ut.

$$\int_{12}^{\infty} x^{-3/2} dx$$

**Oppgave 2** Finn den største definisjonsmengden til funksjonen

$$f(x) = \ln \left( \frac{x}{(x-3)^2} \right).$$

**Oppgave 3** Deriver inversfunksjonen til  $h(x) = 27/x^3$ .

**Oppgave 4** Regn ut integralet nedenfor og forklar hvordan analysens fundamentalteorem brukes i regningen.

$$\int_{-4}^4 (x^3 + e^{5x}) dx$$

**Oppgave 5** Hva er verdimengden til funksjonen  $f$  definert på  $(0, \infty)$  med formelen  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ?

**Oppgave 6** Regn ut den deriverte til  $f(x) = \sin(3e^x + 2x)$ .

**Oppgave 7** Gi den lineære tilnærminga til funksjonen  $f(x) = \ln(2x)$  i punktet  $x = 3$ . Skisser  $f$  og tilnærminga i det samme koordinatsystemet.

**Oppgave 8** Undersøk om sirkelen  $(x+3)^2 + y^2 - 2y = 3$  skjærer koordinataksene  $y = 0$  og  $x = 0$ . Regn ut algebraisk og skisser geometrisk.

**Oppgave 9** Regn ut grenseverdien  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+1)(x-3)}{e^{x-3} - 1}$ .

**Oppgave 10** Finn et reelt tall  $a \in \mathbb{R}$  slik at funksjonen  $g$  nedenfor er kontinuerlig på hele  $\mathbb{R}$ .

$$g(x) = \begin{cases} 10^x + a, & \text{hvis } x < -2 \\ \frac{1}{x+12}, & \text{hvis } x \geq -2 \end{cases}$$

**Regneregler for potenser.** For  $a > 0$  er

$$\bullet a^x a^y = a^{x+y} \quad \bullet \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \bullet (a^x)^y = a^{xy} \quad \bullet a^x = e^{x \ln(a)}$$

**Regneregler for logaritmer.** For  $x, y > 0$  er

$$\bullet \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \bullet \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y) \quad \bullet \ln(x^a) = a \ln(x)$$

**Trigonometriske identiteter.**

$$\bullet \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \bullet \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \bullet \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

**Ligning til en sirkel.** Ligningen til en sirkel med sentrum  $(a, b)$  og radius  $r > 0$  er  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

**Tangentligner.** Ligningen for tangentlinjen til  $y = f(x)$  i punktet  $x_0$  gitt ved  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Regneregler for derivasjon.** Hvis  $f$  og  $g$  er deriverbare i  $x$ , så gjelder:

$$\bullet (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{gitt at } g(x) \neq 0)$$

**Kjerneregelen.** Hvis  $g$  er deriverbar i  $x$  og  $f$  er deriverbar i  $g(x)$ , så er  $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ .

**Derivasjon av potensfunksjoner.**  $\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$

**Derivasjon av eksponential- og logaritmefunksjon.**  $\frac{d}{dx} e^x = e^x$  og  $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$ .

**Derivasjon av trigonometriske funksjoner.**  $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$  og  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$  og  $\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x)$

**Derivasjon av inversfunksjoner.** Hvis  $f$  er deriverbar og injektiv (en-til-en), så er

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

dersom  $y = f(x)$  og  $f'(x) \neq 0$ .

**Newtons metode.**  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

**Taylorpolynomier.** Taylorpolynomet til  $f$  av grad  $n$  om punktet  $a$  er

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Hvis  $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ , så er  $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$  for en  $c$  mellom  $a$  og  $x$ .

**Noen ubestemte integraler.** Her er  $a \neq 0$  og  $r \neq -1$ .

$$(1) \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(3) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$(4) \int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

$$(5) \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

**Midtpunktregelen.** La  $s = (b - a)/n$  og  $c_k = a + s(k - 1/2)$  for  $k = 1, 2, \dots, n$ . Da er

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = s(f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n)).$$

Dersom  $|f''(x)| \leq K$  for alle  $a \leq x \leq b$ , så er

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}.$$

**Leibniz' regel.**  $\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(y) dy = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$ .