NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0001 Brukerkurs i matematikk A**

Faglig kontakt under eksamen: Ole Fredrik Brevig

Tlf: 97 96 34 19

Eksamensdato: 13. august 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Eksamenssettet består av 10 oppgaver som alle teller like mye.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 1

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Forenkle uttrykket $4^{\frac{1}{2}\log_2(1+x^2)}$ så mye som mulig.

Oppgave 2 Bestem (den største) definisjonsmengden til funksjonen gitt ved

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Hva blir verdimengden?

Oppgave 3 Finn den deriverte av $f(x) = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.

Oppgave 4 Regn ut grenseverdien $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1-\cos(2x)}$.

Oppgave 5 I denne oppgaven er $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig deriverbar funksjon som oppfyller:

$$f(1) = 5, \qquad f(2) = 7, \qquad f(5) = 1.$$

Forklar hvorfor det finnes et tall c slik at $f'(c) = 1$.

Oppgave 6 La $f(x) = x^2 + a$. Finn et tall a slik at $f(\sqrt{3}) = 0$. Bruk Newtons metode med startverdi $x_0 = 2$ og $n = 2$ steg for å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt{3}$.

Oppgave 7 Finn andre grads Taylorpolynom til $f(x) = \ln(1+x^2)$ om $a = 0$.

Oppgave 8 Finn alle antideriverte av funksjonen $f(x) = 4\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\sin(3x)$.

Oppgave 9 La $a > 0$. Regn ut integralet

$$\int_{-a}^{a} \left(e^x - e^{-x}\right)\, dx.$$

Oppgave 10 La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig deriverbar funksjon med $f(1) = 0$ og anta at f har en inversfunksjon f^{-1}. Regn ut

$$\int_1^{f^{-1}(x)} f'(y)\, dy.$$

Regneregler for potenser. For $a > 0$ er

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x = e^{x\ln(a)}$

Regneregler for logaritmer. For $x, y > 0$ er

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^a) = a\ln(x)$

Trigonometriske identiteter.

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Ligning til en sirkel. Ligningen til en sirkel med sentrum (a, b) og radius $r > 0$ er $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Tangentlinger. Ligningen for tangentlinjen til $y = f(x)$ i punktet x_0 gitt ved $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Regneregler for derivasjon. Hvis f og g er deriverbare i x, så gjelder:

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (gitt at $g(x) \neq 0$)

Kjerneregelen. Hvis g er deriverbar i x og f er deriverbar i $g(x)$, så er $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

Derivasjon av potensfunksjoner. $\dfrac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$

Derivasjon av eksponential- og logaritmefunksjon. $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$ og $\dfrac{d}{dx} \ln(x) = \dfrac{1}{x}$.

Derivasjon av trignonometriske funksjoner. $\dfrac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ og $\dfrac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$ og $\dfrac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x)$

Derivasjon av inversfunksjoner. Hvis f er deriverbar og injektiv (en-til-en), så er

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

dersom $y = f(x)$ og $f'(x) \neq 0$.

Newtons metode. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Taylorpolynomer. Taylorpolynomet til f av grad n om punktet a er

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Hvis $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, så er $E_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ for en c mellom a og x.

Noen ubestemte integraler. Her er $a \neq 0$ og $r \neq -1$.

(1) $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

(3) $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

(4) $\displaystyle\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$

(5) $\displaystyle\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$

Midtpunktregelen. La $s = (b-a)/n$ og $c_k = a + s(k - 1/2)$ for $k = 1, 2, \ldots, n$. Da er

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = s\left(f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)\right).$$

Dersom $|f''(x)| \leq K$ for alle $a \leq x \leq b$, så er

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}.$$

Leibniz' regel. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(y)\,dy = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$.