# EKSAMEN MA0001 HØST 2017 — LØSNINGSFORSLAG

**Oppgave 1.** Vi bruker brøkregelen $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Her er $u = e^x$ og $v = 1 - x$. Altså er $u' = e^x$ og $v' = -1$. Vi får

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x}{1-x} = \frac{e^x(1-x) - e^x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

**Oppgave 2.** Vi bruker kjerneregelen med $(1 + \ln(x))' = 0 + \frac{1}{x}$, som gir

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1 + \ln(x))^2 = 2\,(1 + \ln(x)) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\,(1 + \ln(x))}{x}.$$

**Oppgave 3.** Vi bruker L'Hôspitals regel,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + \cos(\pi x)}{1 - 4x + 3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \sin(\pi x) \cdot \pi}{-4 + 6x} = \frac{1}{2}.$$

**Oppgave 4.** Vi skal bruke skviseteoremet for å regne ut grenseverdien

$$L = \lim_{x \to 0} |\sin(x)| \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vi vet at $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ for alle $x \neq 0$. Siden $|\sin(x)| \geq 0$, får vi derfor at

$$-|\sin(x)| \leq |\sin(x)| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |\sin(x)|$$

for alle $x \neq 0$. Siden $\lim_{x \to 0} -|\sin(x)| = \lim_{x \to 0} |\sin(x)| = 0$ gir skviseteoremet at også $L = 0$.

**Oppgave 5.** Newtons metode finner en tilnærmet løsning til ligningen $f(x) = 0$ for en deriverbar funksjon $f$. For ligningen $x^5 = 4 - 5x$ bruker vi derfor $f(x) = x^5 + 5x - 4$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 + 5x_n - 4}{5x_n^4 + 5}.$$

Vi har startverdi $x_0 = 1$ og skal gjøre to steg. Vi får

$$x_1 = \frac{4}{5} = 0.8 \qquad \text{og} \qquad x_2 = \frac{16596}{22025} = 0.7535\ldots$$

**Oppgave 6.** Formelen for andre grads Taylorpolynom om $x = a$ er

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Her er $f(x) = \sin(x^2)$ og $a = \sqrt{\pi}$. Vi trenger altså $f'$ og $f''$. Vi deriverer

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2), \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) + 2x\left(-\sin(x^2) \cdot 2x\right) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2). \end{aligned}$$

Så regner vi ut

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\pi}\right) &= \sin(\pi) = 0, \\ f'\left(\sqrt{\pi}\right) &= 2\sqrt{\pi}\cos(\pi) = -2\sqrt{\pi}, \\ f''\left(\sqrt{\pi}\right) &= 2\cos(\pi) - 4\pi\sin(\pi) = -2. \end{aligned}$$

Altså blir

$$P_2(x) = 0 - 2\sqrt{\pi}\left(x - \sqrt{\pi}\right) + \frac{-2}{2!}\left(x - \sqrt{\pi}\right)^2 = -2\sqrt{\pi}\left(x - \sqrt{\pi}\right) - \left(x - \sqrt{\pi}\right)^2.$$

**Oppgave 7.** Vi antideriverer,

$$\int \frac{2}{x} + 2e^{2x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int e^{2x}\,dx = 2\ln|x| + 2\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C = 2\ln|x| + e^{2x} + C.$$

**Oppgave 8.**

(a) Vi skal bruke midtpunktsregelen med $a = 0$, $b = 6$, $n = 3$ og

$$f(x) = \sqrt{1 + 2(x-3)^2}.$$

Da blir $s = (b-a)/n = 2$ og $c_k = a + s(k - 1/2) = 2k - 1$. Vi regner

| $k$ | $c_k$ | $f(c_k)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 5 | 3 |

Altså blir $M_3 = s\left(f(c_1) + f(c_2) + f(c_3)\right) = 2\cdot(3 + 1 + 3) = 14$.

(b) Vi vet at

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - M_n\right| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

dersom $|f''(x)| \le K$ for alle $a \le x \le b$. Vi har $a = 0$, $b = 6$ og $n = 3$. Altså er

$$\left|\int_0^6 f(x)\,dx - M_3\right| \le \frac{K(6-0)^3}{24\cdot 3^2} = \frac{K\cdot 216}{216} = K.$$

Det gjenstår å finne et tall $K$ slik at $|f''(x)| \le K$ når $0 \le x \le 6$. Det er oppgitt at

$$f''(x) = \frac{2}{\left(1 + 2(x-3)^2\right)^{3/2}}.$$

For å finne den største verdien til $|f''(x)|$ må vi finne den minste verdien til det som står under brøkstreken. Vi ser at $1 + 2(x-3)^2$ er minst når $x = 3$, siden $2(x-3)^2 \ge 0$. Altså er $|f''(x)| \le |f''(3)| = 2 = K$. Totalt får vi derfor

$$\left|\int_0^6 f(x)\,dx - M_3\right| \le 2.$$

**Oppgave 9.** Vi regner ut integralet

$$\int_0^1 \left(2x^2 - \sin(\pi x)\right)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{-1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{\cos(\pi)}{\pi} - \left(0 + \frac{\cos(0)}{\pi}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi}.$$

**Oppgave 10.**

(a) $F$ er en antiderivert til $f$ dersom $F'(x) = f(x)$. Altså må vi sjekke at

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(x\ln(x) - x\right) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

(b) Vi vet fra (a) at $F(x) = x\ln(x) - x$ er en antiderivert til $f(x) = \ln(x)$. Ved analysens fundamentalteorem er altså

$$\int_1^e \ln(x)\,dx = \int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1) = e\ln(e) - e - (1\cdot\ln(1) - 1) = 1.$$