MA0001: TAYLOR-POLYNOMER OG FEILESTIMATER

Taylor-polynomet av grad n til en funksjon f om punktet $x = a$ er

$$(1)\quad P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Husk at fakultet er definert ved

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

For eksempel er $5! = 120$.

Vi definerer feilen ved $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Taylors teorem forteller oss at feilen kan uttrykkes som

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{2}$$

hvor c er et *ukjent* tall mellom a og x. Når vi ser på (2) vet vi hva f, n, a og x er. Siden vi ikke vet hva tallet c er, må vi gjøre et estimat for å kontrollere feilen. "Hvor stor kan $|E_n(x)|$ bli for c mellom a og x?"

I dette notatet gjennomgår vi en typisk oppgave forholdsvis detaljert. Noen av (de enklere) stegene overlates til leseren.

Eksempel. La $f(x) = e^{-x^2}$. Finn andre grads Taylor-polynom for f om $x = 0$ og gi et estimat for absoluttverdien til feilen i punktet $x = 1/2$.

Vi begynner med å skrive opp formlene for Taylor-polynom og feilen når $n = 2$ og $a = 0$. De blir:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\ E_2(x) &= \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-0)^3, \qquad \text{for ukjent } c \text{ mellom } 0 \text{ og } x. \end{aligned}$$

Vi må altså regne ut f', f'' og $f^{(3)}$. De blir (sjekk utregningene selv!):

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}, \\ f''(x) &= e^{-x^2}(4x^2-2), \\ f^{(3)}(x) &= e^{-x^2}(12x-8x^3). \end{aligned}$$

Vi finner derfor ut at $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ og $f''(0) = -2$, så Taylor-polynomet blir

$$P_2(x) = 1 - x^2.$$

Når det gjelder feilestimatet er vi interessert i punktet $x = 1/2$, så innsatt i (2) får vi

$$E_2(1/2) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(1/2-0)^3 = \frac{f^3(c)}{3! \cdot 2^3} \tag{3}$$

hvor c er et ukjent tall mellom 0 og 1/2. Vi må derfor se nøye på $f^{(3)}(c)$. Vi begynner med å trekke ut 4 og x, så vi får

$$f^{(3)}(c) = e^{-c^2}(12c - 8c^3) = e^{-c^2} \cdot 4(3c - 2c^3) = e^{-c^2} \cdot 4c(3 - 2c^2).$$

Her har vi tre faktorer, nemlig e^{-c^2}, $4c$ og $3 - 2c^2$. For å estimere $|f^{(3)}(c)|$ ser vi hvor store hver og en av dem kan bli når $0 \leq c \leq 1/2$. Det er klart at

$$|e^{-c^2}| \leq |e^{-0^2}| = 1$$

og at

$$|4c| \leq |4 \cdot 1/2| = 2.$$

I det siste leddet får vi at

$$|3 - 2c^2| \leq |3 - 2 \cdot 0^2| = 3.$$

Totalt har vi estimert at $|f^{(3)}(c)| \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ når $0 \leq c \leq 1/2$. Hvis vi kombinerer dette med (3) får vi at

$$|E_2(1/2)| = \frac{|f^{(3)}(c)|}{6 \cdot 8} \leq \frac{6}{6 \cdot 8} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

To kommentarer:

(1) Vi skal *ikke* bruke kalkulatoren for å regne ut $E_2(1/2) = f(1/2) - P_2(1/2)$. Poenget med feilestimater er at vi (later som at vi) *ikke* vet $f(1/2)$ og vil bruke $P_2(1/2)$ som en tilnærming. Vi gir så et estimat for feilen ved å bruke (2).

(2) Det er mulig (men vanskelig) å vise at maksverdien til $f^{(3)}(c)$ for $0 \leq c \leq 1/2$ er

$$f^{(3)}(1/2) = \frac{5}{e^{1/4}} = 3.89\ldots$$

Det er ikke viktig å finne det *beste* mulig feilestimatet, og det holder å finne et estimat vi kan argumentere for matematisk.