Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0001 Brukerkurs i matematikk A Høst 2016

Løsningsforslag — Øving 13

OBS: Denne øvingen skal *ikke* leveres inn!

Oppgaver

Eksamen 2015, Oppgave 7 Kurvene $y = x$ og $y = x^2$ skjærer hverandre i to punkter $x = a$ og $x = b$. Hvor stort er arealet mellom de to kurvene $y = x$ og $y = x^2$ og med $a \leq x \leq b$?

Løsning:
Kurvene skjærer hverandre når $x = x^2$, dvs. $a = 0$ og $b = 1$. For $x \in [0, 1]$ er $x^2 \leq x$, så arealet mellom kurvene på dette intervallet er

$$\int_0^1 x - x^2 \, \mathrm{d}x = \Big|_0^1 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Eksamen 2012, Oppgave 5 Anta at endringen i biomasse $B(t)$ ved tid t er gitt ved ligningen

$$\frac{d}{dt} B(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

for $0 \leq t \leq 24$. Biomassen ved $t = 0$ er $B(0) = 100$.

a) Finn biomassen $B(t)$ for enhver t.

b) Finn $B(24)$.

c) Finn den gjennomsnittlige biomassen over tidsintervallet $[0, 24]$.

Løsning: a)

$$B(t) = \int \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) \, \mathrm{d}t = \frac{12}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + C.$$

$$100 = B(0) = 0 + C.$$

Dermed er

$$B(t) = \frac{12}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 100.$$

Løsning: b)

$$B(24) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}24\right) + 100 = 100.$$

Løsning: c)
Gjennomsnittet av en funksjon f over et intervall $[a,b]$ er definert som $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{24-0}\int_0^{24} B(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{24}\int_0^{24}\frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 100\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{24}\Big|_0^{24} - \frac{12^2}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 100t \\ &= \frac{1}{24}\left(-\frac{12^2}{\pi^2} + \frac{12^2}{\pi^2} + 100\cdot 24 - 0\right) \\ &= 100.\end{aligned}$$

3 La $x \geq 1$ og bruk Leibnizs regel til å regne ut

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} u - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du.$$

Løsning:
Leibniz' regel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} u - \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u &= \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)2x - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \left(x^2 - x^{-1}\right)2x - \left(x^{1/2} - x^{-1/4}\right)\frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= 2x^3 - 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-3/4} \\ &= 2x^3 + \frac{1}{2}x^{-3/4} - \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 6.2 (side 305–306) i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser.

- 1, 3, 9, 11, 15, 19, 21, 23, 35.
- 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 57, 75, 89, 91, 93, 95.

Fra Avsnitt 6.3 (side 305–306).

- 1, 3, 11.
- 25, 27.

Fra Avsnitt 7.4 (side 362–363).

- 1, 3, 5, 7, 17, 33.